Darstellung

der

Näherungswerthe von Kettenbrüchen

in independenter Form.

Habilitationsschrift

zur

Erlangung der venia legendi

an der

Universität Erlangen

von

Dr. phil. Siegmund Günther.

I. Theil.

Erlangen, 1872.

Verlag von Eduard Besold.

Darstellung

der

Näherungswerthe von Kettenbrüchen

in independenter Form.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Habilitationsschrift

zur

Erlangung der venia legendi

an der

Universität Erlangen

von

Dr. phil. Siegmund Günther.

I. Theil.

Erlangen, 1872.

Verlag von Eduard Besold.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von E. Th. Jacob in Erlangen.

Vorwort.

Es wird im Folgenden eine Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen vermittelst Determinanten gegeben, welche, wenn auch schon mehrfach angedeutet, doch wohl hier zuerst in systematischer Form erscheint. Insbesondre ward Gewicht gelegt auf die kritische Darstellung der mannigfaltigen älteren und neueren Versuche, die independente Darstellung der Näherungswerthe zu ermöglichen. Denn die Geschichte der Mathematik wird am meisten gefördert durch eine derartige gesonderte Bearbeitung einzelner Partien der Wissenschaft; die geschichtlichen Arbeiten von Todhunter über die Wahrscheinlichkeits-, von Giessel über die Variationsrechnung, von M. Cantor und Friedlein über die Zahlzeichen, von Cherbuliez über gewisse Theile der mathematischen Physik, legen hiefür beredtes Zeugniss ab. Gehört das vorliegende Problem auch durchaus nicht zu den wichtigsten, so ist seine genaue historische Bearbeitung doch besonders deshalb von Interesse, weil sich Gelegenheit bietet, die immerhin merkwürdige combinatorische Analysis in den Bereich der Betrachtung zu ziehen.

Die wahre Fruchtbarkeit dieser neuen Darstellungsweise wird sich besonders im 3. Kapitel erweisen, indem hier theils verschiedne bekannte Sätze eine bequemere Fassung und einen kürzeren Beweis erhalten, theils auch die Determinantentheorie

manche ihrer Sätze für die Lehre von den Kettenbrüchen auf neue und interessante Weise zu verwerthen gestattet.

Erst während des Druckes wurde mir durch das Jahrbuch bekannt, dass der dänische Mathematiker Thiele denselben Gegenstand bearbeitet habe; eine Einsicht seiner Abhandlung war mir leider nicht möglich. Dem Referat des Jahrbuchs zufolge scheinen jedoch bei ihm Anwendungen auf die Geometrie im Vordergrund zu stehen, während die vorliegende Arbeit theils historischen, theils analytischen Inhalts ist.

Dr. phil. S. Günther.

Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form.

Kapitel I.

Vergleichende Uebersicht der bisher zu diesem Zwecke angewandten Methoden.

1. Regeln zur bequemen Darstellung und Berechnung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs gab zuerst der deutsche Mathematiker Daniel Schwenter, Professor zu Altdorf im ersten Viertel des 17. Jahrhunderts, und zwar sind diese Regeln im Wesentlichen ganz die noch jetzt von uns gebrauchten. Nachdem Schwenter bei der Aufgabe [1]): „Einen grossen Bruch, so nicht aufgehebt werden mag arithmeticè, doch mechanicè mit kleinern Zahlen auf allerley Art auszusprechen“ zuerst die Verwandlung eines gemeinen Bruchs, nämlich des Bruchs $\frac{177}{233}$ in einen Kettenbruch, sodann die Anfertigung folgenden Tableaus gelehrt hat, fährt er folgendermassen

233		1	1 0
177	1	0	
56	3		
9	6		
2	4		
1	2		
0	0		

fort: „Ferner spricht man, einmal nulla ist nulla, eins dazu ist eins, diss schreibt man unter eins nulla, gegen der rechten Hand. Dar-

nach sagt man, einmal eins ist eins, nulla dazu ist eins, diss schreibt man unter das vorige eins. Item 3 mal eins ist 3, eins so drüber stehet dazu ist 4, diss schreibt man unter die zwey eins, hernach 6 mal 4 ist 24, und eins, so darüber stehet, dazu ist 25, die unterschreibt man auch: Also 4 mal 25 ist 100, und 4 dazu, ist 104, und 2 mal 104 ist 208, dazu 25, seynd 233.

Letzlich macht man auch die mittlere Ordnung, als: Einmal Nulla ist nichts, eins dazu ist eins, 3 mal eins ist 3, Nulla dazu ist 3, und 6 mal 3 ist 18, eins dazu ist 19, und 4 mal 19 ist 76, und 3 dazu ist 79, und 2 mal 79 ist 158, und 19 dazu, ist 177, stehet also:

233		1	1 0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Nun sihet man hieraus, dass erstlich zu unterst der Bruch gantz vollkommen herauskommt, nun möchte ein Mechanicus den andern darüber brauchen als $\frac{79}{104}$ wäre aber dieser noch zu gross, könte er den dritten nehmen, als $\frac{19}{25}$, oder den vierdten $\frac{3}{4}$, doch ist hierbey zu wissen, je weiter man von dem untersten hinaufsteiget, je mehr es fehlet. Zum Exempel $\frac{79}{104}$, seyend näher bey $\frac{177}{233}$, als $\frac{19}{25}$, und $\frac{19}{25}$ näher, als $\frac{3}{4}$, und so fortan, welches eine sehr nutzliche Regul in dem Landmessen.“ Man sieht, dass hier das recurrente Gesetz des Fortschreitens der Zähler und Nenner eines Näherungsbruches vollständig richtig angegeben ist; selbst die Vorsetzung des Bruches $\frac{1}{0}$ findet sich bereits.

Auch Wallis [2]) und Huygens [3]) beschäftigen sich mit der estimmung der Näherungswerthe. Insbesondere ist die Darstellungs-

weise des erstren wichtig, weil er zuerst die Buchstabenbezeichnung anwandte und den Satz

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n\, p_{n-1} + b_n\, p_{n-2}}{a_n\, p_{n-1} + b_n\, q_{n-2}}$$

bewies, unter $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ resp. den nten, (n—1)ten und (n—2)ten Näherungsbruch des allgemeinen Kettenbruchs verstanden. An die Auffindung eines independenten Gesetzes konnte damals noch nicht gedacht werden.

1) Schwenter, Deliciae Physico-Mathematicae oder Mathemat. und Philosophische Erquickstunden, Nürnberg 1636. S. 111.

2) Wallis, Arithmetica Infinitorum, sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata, Oxonii 1656. S. 191.

3) Huygens, Descriptio Automati Planetarii; Opuscula Postuma, Hagae-Comitum 1698. S. 453.

2. Die Lehre von den Kettenbrüchen verdankt bekanntlich Euler fast Alles, was ihr im Laufe des 18. Jahrhunderts an Bereicherungen zu Theil wurde; insbesondere jedoch bildete den Gegenstand seiner Bemühungen die Ueberführung unendlich fortlaufender Kettenbrüche in andre „unendliche Ausdrücke," Produkte und Reihen. Hiebei musste es nun von höchster Wichtigkeit sein, ein allgemeines Gesetz zu kennen, welches die Bildung jedes beliebigen Näherungsbruches gestattete ohne die oft mühsame Berechnung aller vorhergehenden.

In der That scheint sich Euler vielfach mit diesem Gegenstande beschäftigt zu haben, ohne ein günstiges Resultat zu erzielen so dass er sich zu dem Ausspruche veranlasst sah, dass „das Gesetz,, nach welchem der Zähler und Nenner in diesen auf die gewöhnliche Art ausgedruckten Brüchen aus den Buchstaben a, b, c, d, etc. formirt werden, nicht leicht zu erkennen ist [4])." An dieser Stelle wird nur die recurrente Berechnung der Näherungswerthe gelehrt, und zwar mit Zuhülfenahme des Bruches $\frac{1}{0}$.

Da die gewöhnlichen Bezeichnungsweisen zur Herstellung des gesuchten independenten Gesetzes nicht genügten, so schuf Euler sich einen eignen Algorithmus und stellte Regeln auf, um mit diesen Symbolen ganz wie mit andren algebraischen Zeichen rechnen

zu können. Auffallend muss es erscheinen, dass Euler bei seinen vielfachen Versuchen die von Cramer und andren schon mehrfach angewandten Determinanten nicht zu seinem Zwecke benützte, sondern sich mit seinen im Ganzen doch ziemlich unvollkommenen combinatorischen Symbolen behalf [5]).

Euler geht von dem Kettenbruche

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

aus, und setzt den Nenner des vierten Näherungswerthes

$$bcd + d + b = (b, c, d)$$

und den Zähler

$$abcd + cd + ad + ab + 1 = (a, b, c, d)$$

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar folgende Relationen:

$$(a, b) = b\,(a) + 1 = b\,(a) + (\,)$$
$$(a, b, c) = c\,(a, b) + (a)$$
$$(a, b, c, d) = d\,(a, b, c) + (a, b)$$
$$(a, b, c, d, e) = e\,(a, b, c, d) + (a, b, c)$$

und allgemein

$$(a, b, c \ldots p, q, r) = r\,(a, b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p).$$

Auf einfache Weise gelangt man zu dem höchst wichtigen Satze, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

gleiche Nenner ergeben; es ist nämlich

$$(a, b) = (b, a)$$
$$(a, b, c) = (c, b, a)$$
$$(a, b, c, d) = (d, c, b, a)$$
$$(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a)$$

„Dummodo ergo ordo indicum detur, sive sit directus, sive retrogradus, perinde est; utroque enim modo idem numerus inde formatus obtinetur."

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$(a, b, c, d, etc.) = a(b, c, d, etc.) + (c, d, etc.)$$

und hieraus

$$\frac{(a,\ b,\ c,\ d,\ e)}{(b,\ c,\ d,\ e)} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

Auch der Werth eines unendlichen Kettenbruches kann in derselben Weise als Quotient zweier unendlichen Symbole ausgedrückt werden.

Zunächst wird nun mit Hülfe des Algorithmus der Nachweis geführt, dass jeder folgende Näherungsbruch sich dem wahren Werthe immer mehr und mehr nähert, und hiezu ist es nöthig, den Satz zu beweisen

$$p_1\ q_2 - p_2\ q_1 = \pm 1$$

wenn p_1, p_2 die Zähler, q_1, q_2 die Nenner zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind. Der Gang des Beweises ist im wesentlichen folgender:

$(a, b, c \ldots p, q)\ (b, c \ldots p, q, r) - (b, c \ldots p, q)\ (a, b, c \ldots p, q, r)$
$= (a, b, c \ldots p, q)\ r\ (b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p, q)\ (b, c \ldots p)$
$- (b, c \ldots p, q)\ r\ (a, b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p, q)\ (a, b, c \ldots p)$
$= - [(a, b, c \ldots p)\ (b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p)\ (a, b, c \ldots p, q)]$

Nun ist offenbar der hier in Klammern stehende Ausdruck die Differenz, welche der von uns berechneten vorhergeht, wenn man die sämmtlichen Differenzen, entsprechend der obigen, bildet; somit sind diese sämmtlichen Differenzen, mit abwechselndem Vorzeichen, gleich. Nun ist

$$(a)\ (b) - 1\ (a,\ b) = - 1$$

somit allgemein

$(a, b, c, d \ldots m)\ (b, c, d \ldots m, n) - (b, c, d \ldots m)\ (a, b, c, d \ldots m, n) = \pm 1$

Die aufeinanderfolgenden Differenzen zweier Näherungsbrüche lassen sich hiernach folgendermassen darstellen

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a,\ b)}{(b)} = \frac{-1}{1\ (b)}$$

$$\frac{(a,\ b)}{(b)} - \frac{(a,\ b,\ c)}{(b,\ c)} = \frac{+1}{(b)\ (b,\ c)}$$

$$\frac{(a,\ b,\ c)}{(b,\ c)} - \frac{(a,\ b,\ c,\ d)}{(b,\ c,\ d)} = \frac{-1}{(b,\ c)\ (b,\ c,\ d)}$$

$$\frac{(a,\ b,\ c,\ d)}{(b,\ c,\ d)} - \frac{(a,\ b,\ c,\ d,\ e)}{(b,\ c,\ d,\ e)} = \frac{+1}{(b,\ c,\ d)\ (b,\ c,\ d,\ e)}$$

und hieraus ergiebt sich durch einfache Addition ein Mittel, jeden Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln; es ist nämlich

$$\frac{(a, b, c, d, e \ldots)}{(b, c, d, e \ldots)} = a + \frac{1}{1\ (b)} - \frac{1}{(b)\ (b, c)} + \frac{1}{(b, c)\ (b, c, d)} - \frac{1}{(b, c, d)\ (b, c, d, e)} + \ldots$$

oder auch

$$\frac{(a, b, c, d, e \ldots)}{(b, c, d, e \ldots)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)\ (b, c, d)} - \frac{f}{(b, c, d)\,(b, c, \overline{d, e}, f)} - \frac{h}{(b, c, d, e, f)\ (b, c, d \ldots h)} - \ldots$$

Diese sämmtlichen Ableitungen werden zwar mit Hülfe des neuen Algorithmus durchgeführt, ohne dass derselbe jedoch in einer anderen Rolle, als in der einer bequemeren Bezeichnungsweise auftritt; Euler bemerkt diess selbst, indem er sagt. „Sed missis his, quae ad series spectant, quoniam ea jam fusius sum persecutus, perpendamus ea, quae ad singularem harum quantitatum algorithmum pertinent“ [6]).

Die nun folgenden Sätze werden mit Hülfe der symbolischen Bezeichnungsweise allerdings leichter gewonnen, als auf dem gewöhnlichen Wege. Durch Induktion gelangt man zu folgender Gruppe von Relationen:

$$(a \ldots y) - (a, b \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)\ (a, b \ldots y) = 0$$
$$(a, b \ldots y) - (b, c \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)\ (b, c \ldots y) = \pm 1$$
$$(a, b, c \ldots y) - (c, d \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)\ (c, d \ldots y) = \pm (a)$$
$$(a, b, c, d \ldots y) - (d, e \ldots y, z) - (a, b \ldots y, z)\ (d, e \ldots y) = \pm (a, b)$$
$$\vdots$$

welche sämmtlich als spezielle Fälle des folgenden Hauptsatzes erscheinen:

$$(a \ldots l, m, n \ldots p)\ (n \ldots p, q, r \ldots z) - (a \ldots l, m, n \ldots p, q, r \ldots z) \cdot (n \ldots p) = \pm (a \ldots l)\ (r \ldots z)$$

Es folgt hierauf noch eine Anweisung, derartige Formeln in beliebiger Anzahl herzustellen [7]): „Hujusmodi autem formulae, quot lubuerit, facile sequenti modo exhiberi possunt; sumatur tertium vinculum, quod est completum, et omnes indices continet, abscindan-

tur ab initio superne ii indices, qui primum vinculum constituant, tum inferne a fine ii, qui vinculum secundum constituant; ita tamen, ut in duobus primis vinculis omnes indices occurrant. Tum qui locis abscissis utrinque sunt vicini puncto notentur, indeque facile hujusmodi formulae exhibentur:“

$$\overline{|a,\ b,\ \underline{|c,\ d|}\ e,\ f|} \text{ giebt}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d)\ (c,\ d,\ e,\ f) - (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)\ (c,\ d) = -\ (a)\ (f)$$

$$\overline{|a,\ b,\ c,\ |}\ \underline{|d,\ e,\ f\ |} \text{ giebt}$$

$$(a,\ b,\ c)\ (d,\ e,\ f) - (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)\ 1 = -\ (a,\ b)\ (e,\ f)$$

$$\overline{|a,\ b,\ c,\ \underline{|d,|}\ e,\ f|} \text{ giebt}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d)\ (d,\ e,\ f) - (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)\ (d) = +\ (a,\ b)\ (f).$$

Zum Schlusse der Abhandlung wird noch eine Anwendung dieser Sätze auf die Bestimmung der Differenzen zweier beliebiger Näherungswerthe gemacht. Legt man wieder einen Kettenbruch

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \ldots$$

zu Grunde, so erhält man, wenn A, B, C . , . die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind,

$$A - B = -\frac{1}{1\,(b)} \qquad B - E = +\frac{(d,\ e)}{(b)\ (b,\ c,\ d,\ e)}$$

$$A - C = -\frac{(c)}{1\,(b,\ c)} \qquad B - F = +\frac{(d,\ e,\ f)}{(b)\ (b,\ c,\ d,\ e,\ f)}$$

$$A - D = -\frac{(c,\ d)}{1\,(b,\ c,\ d)} \qquad C - D = -\frac{1}{(b,\ c)\ (b,\ c,\ d)}$$

$$A - E = -\frac{(c,\ d,\ e)}{1(b,\ c,\ d,\ e)} \qquad C - E = -\frac{(e)}{(b,\ c)\ (b,\ c,\ d,\ e)}$$

$$B - C = +\frac{1}{(b)\ (b,\ c)} \qquad C - F = -\frac{(e,\ f)}{(b,\ c)\ (b,\ c,\ d,\ e,\ f)}$$

$$B - D = +\frac{(d)}{(b)\ (b,\ c,\ d)} \qquad C - G = -\frac{(e,\ f,\ g)}{(b,\ c)\ (b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g)}$$

⋮

„Quoniam igitur in doctrina de fractionibus continuis, cuius jam aliquot specimina edidi, hujus generis numeri per indices formati totum negotium conficiunt: algorithmi eorum species, quam hic exposui, nec non insignes comparationes inventae, non exiguum prae-

stabunt usum in hoc argumento uberius excolendo, unde has animadversiones usu non carituras esse confido“ [8]).

Diese hier ausgesprochene Hoffnung Euler's gieng nicht in Erfüllung. Euler selbst bediente sich seines Algorithmus nur noch ein einzigesmal bei Auflösung eines Problems der unbestimmten Analytik [9]), obwohl er sich später noch vielfach mit den Kettenbrüchen beschäftigte. Die gleichzeitigen Mathematiker scheinen sich gar nicht dieser immerhin nur wenig verwendbaren Rechnungsmethoden bedient zu haben; Daniel Bernoulli [10]) tadelt besonders den Umstand, dass Euler nicht den allgemeinen Kettenbruch

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$$

als Ausgangspunkt genommen habe. Mit Recht sagt Hindenburg [11]: „Man kann sich mehrere solche besondere Algorithmen und daraus abgeleitete Formeln für andere Aufgaben, wo es Schwierigkeiten hat, die Endresultate aus den gegebenen Grössen ohne Umschweife darzustellen, gedenken. Wollte man aber auch dergleichen ausarbeiten, so würden sie immer als isolirte, nicht aus einer gemeinschaftlichen Quelle fliessende Formeln und Vorschriften, dem Gedächtnisse zur Last fallen, und doch insgesamt als einzelne kleine Bäche in den Strömen eines weit ausgebreiteten Calculs sich verlieren, die sich sämmtlich in den unermesslichen Ocean combinatorischer Veränderungen ergiessen.«

4) L. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, deutsch von Michelsen, Berlin 1788. 1. Buch, S. 387.

5) Id. Specimen Algorithmi Singularis, Novi Commentarii Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, Tom. IX, 1764. S. 53.

6) Ibid. S. 64.

7) Ibid. S. 67.

8) Ibid. S. 69.

9) L. Euler, De usu novi Algorithmi, Novi Commentarii Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, Tom. XI, 1766. S. 28.

10) D. Bernoulli, De fractionibus continuis, ibid. Tom. XX, 1775. S. 41.

11) Hindenburg, Mehrere grosse Mathematiker sind der Erfindung der combinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen, Archiv der reinen und angewandten Mathematik, Leipzig 1795. 1. Bd. S. 336.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Anwendung hat dieser Euler'sche

Algorithmus in neuerer Zeit bei Lejeune-Dirichlet[12]) gefunden, welcher vermittelst desselben einige auf Kettenbrüche bezügliche Sätze beweist.

12) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, Braunschweig 1863. S. 49.

3. In Euler's „Algorithmus" war bereits unzweideutig ausgesprochen, dass nur die Combinatorik den Schlüssel zur Auffindung eines independenten Gesetzes gewähren könne, und in der That sind alle Versuche, welche gleichzeitige und spätere Mathematiker zu diesem Zwecke machten, auf combinatorische Regeln gegründet. Nach Hindenburg's Bemerkung hat Frisi[13]) eine derartige combinatorische Involution gefunden.

Auch Lambert, welcher zuerst die Lehre von den Kettenbrüchen zusammenstellte, beschäftigte sich viel mit diesem Gegenstande. Er geht von dem Bruche

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots$$

aus [14]) und stellt zunächst, ähnlich wie Schwenter (s. o. 1.) die Zähler und Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungswerthe in einer Tabelle zusammen.

B	1	C	0	D
a	0		1	
b	1		a	
c	b		ab + 1	
d	bc + 1		abc + c + a	
=	=	=	=	=

Seine Regel zur recurrenten Berechnung der Näherungswerthe stimmt natürlich ganz mit derjenigen Euler's überein. Nach Hindenburg's Ansicht[15]) hätte es nur der Erweiterung obigen Schemas auf einige weitere Glieder bedurft, um deutlich eine combinatorische Involution hervortreten zu sehen. Geht man von dem allgemeinen Kettenbruche

$$A + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \ldots$$

aus, so nimmt jenes Tableau folgende Gestalt an:

B	1 C	0 D
$\frac{\alpha}{a}$	A	1
$\frac{\beta}{b}$	$Aa + \alpha = \binom{Aa}{\alpha}$	a
$\frac{\gamma}{g}$	$\binom{Aa}{\alpha} b + A\beta$	$ab + \beta$
$\frac{\delta}{d}$	$\binom{Aa}{\alpha}\left[\begin{matrix}bc\\ \gamma\end{matrix}\right] + A\beta c$	$a\left[\begin{matrix}bc\\ \gamma\end{matrix}\right] + \beta c$
$\frac{\varepsilon}{e}$	$\binom{Aa}{\alpha}\left[\begin{matrix}bcd\\ \gamma d\\ b\delta\end{matrix}\right] + A\beta\left[\begin{matrix}cd\\ \delta\end{matrix}\right]$	$a\left[\begin{matrix}bcd\\ \gamma d\\ b\delta\end{matrix}\right] + \beta\left[\begin{matrix}cd\\ \delta\end{matrix}\right]$
$\frac{\varphi}{f}$	$\binom{Aa}{\alpha}\left[\begin{matrix}bcde\\ \gamma de\\ b\delta e\\ bc\varepsilon\\ \gamma\varepsilon\end{matrix}\right] + A\beta\left[\begin{matrix}cde\\ \delta e\\ c\varepsilon\end{matrix}\right]$	$a\left[\begin{matrix}bcde\\ \gamma de\\ b\delta\varepsilon\\ bc\varepsilon\\ \gamma\varepsilon\end{matrix}\right] + \beta\left[\begin{matrix}cde\\ \delta e\\ c\varepsilon\end{matrix}\right]$

Auch aus diesem Schema leitet Hindenburg (a. a. O. S. 329) eine in combinatorischen Zeichen ausgedrückte, allerdings aber durchaus nicht eigentlich independente Formel ab.

Ernstlicher als Lambert bemühte sich Daniel Bernoulli (a. a. O. S. 24 etc.) mit Auffindung eines independenten Gesetzes. Wie sich schon aus der oben angeführten Aeusserung über Euler's Verfahren erwarten lässt, legt er den allgemeinen Kettenbruch zu Grunde. Jedoch scheint auch er an der Möglichkeit eines im eigentlichen Sinne independenten Gesetzes verzweifelt zu haben, denn er beschäftigt sich lediglich mit der Vervollkommung und Vereinfachung der zur Darstellung der Näherungswerthe bisher angewandten Methoden. Sind $\frac{M}{N}$ und $\frac{P}{Q}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, und erhält man den hierauf folgenden $\frac{R}{S}$, wenn man den Kettenbruch bei dem „Index“ $\frac{f}{\varphi}$ abbricht, so ist

$$\frac{R}{S} = \frac{P\varphi + Mf}{Q\varphi + Nf}$$

Bernoulli betrachtet es nun als eine wesentliche Erleichterung („praestantissimum compendium“) des gewöhnlichen Verfahrens, dass man nunmehr blos die zusammengehörigen Glieder aus den

heiden vorhergehenden Werthen abzuschreiben und ihnen die Buchstaben f und φ beizufügen braucht.

Hindenburg (a. a. O. S. 333) sucht auch hier wiederum nachzuweisen, dass ein „blosser Zufall, ein schmales Blatt Papier, das die Complexionen nicht neben einander fassen konnte, hätte veranlassen können, die Complexionen, auch nur eines einzigen Werthes, z. B. des 5ten, in ihrer Ordnung nicht neben, sondern unter einander zu schreiben: so hätten sich ihm, da die einzelnen Complexionen bereits gut geordnet waren, die Involutionen

für Zähler

α	β	γ	δ	ε
a	c	δ	ε	
a	β	d	ε	
a	β	γ	e	
	a	c	e	

u. s. w.

und

für Nenner

a	β	γ	δ	ε
b	γ	δ	ε	
a	c	δ	ε	
α	β	d	ε	
	b	d	ε	
α	β	γ	e	
	b	γ	e	
	α	c	e	

u. s. w.

des 5ten und aller vorhergehenden, und so auch das Fortgangsgesetz für die folgenden Werthe auf einmal vor Augen gestellt, und er würde sie, und ihre Wichtigkeit, auch ohne eingeschriebene Winkel, wohl nicht übersehen und verkannt haben."

13) Pauli Frisii opera, Mediolani 1782. Tom. I. S. 38.

14) Hindenburg, a. a. O. S. 322.

15) Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Berlin 1765—1772. 2. Theil. 1. Abschnitt. III. Abtheilung.

4. Wir kommen nunmehr zu der Periode der eigentlich so genannten combinatorischen Analysis. Alle bisher angeführten Mathematiker hatten sich bereits combinatorischer Symbole und Darstellungsweisen bedient; da jedoch die für dieselben gültigen Gesetze eine systematische Bearbeitung noch nicht erfahren hatten, so konnten auch die bezüglichen Bemühungen keinen besondren Erfolg haben. Dagegen war es einer der ersten Gedanken Hindenburg's, die Kraft seiner neuen Analysis an dem bisher so unzugänglichen Probleme zu prüfen, und in der That gelang es ihm bald, Resultate zu veröffentlichen [16]). Später hat er die Lehre von den Näherungswerthen in einer grösseren Abhandlung bearbeitet.

Eine „combinatorische Involution“ ist im Sinne Hindenburg's [17]) ein Verfahren, vermittelst dessen „für jede ausser der Ordnung geforderte Glieder, Coëfficienten oder Werthe, die Anordnung aus gegebenen Grössen, durch Ziffern oder andre Zeichen zu Complexionen, so getroffen wird, dass in dem Ausdrucke dafür nichts Ueberflüssiges enthalten ist, was zu dem geforderten Gliede nicht gehört, zugleich aber alle vorhergehende Glieder, wie sie, in und neben einander liegend, die folgenden bestimmen, auf's klärste und deutlichste mit vor Augen liegen.“ Ein Winkelhaken trennt je zwei aufeinanderfolgende Glieder.

Dem Charakter der stets mit Symbolen operirenden Hindenburg'schen Analysis gemäss wird der allgemeine Kettenbruch in der Form

$$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$$

eingeführt, wo die Zahlen nichts andres, als die in der neueren mathematischen Bezeichnungsweise üblichen Indices sind. Es wird diess durch folgendes Schema angedeutet:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \ldots \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{d} \ldots \end{pmatrix}$$

Die „Ordnungszahlen“ 1, 2, 3 . . . sind in der damaligen Ausdrucksweise „Lokalzeichen von der einfachsten Art“, indem man unter Lokalzeichen damals überhaupt die Darstellung irgend eines Ausdrucks aus einer Reihe beliebiger gesetzmässig fortlaufender Ausdrücke vermittelst eines Symboles verstand, dem zum Nachweis der Stelle, welchen der betreffende Ausdruck in jener Reihe einnahm, eine Ziffer beigeschrieben war.

Um zunächst das recurrente Gesetz bequemer auszudrücken, seien die Zähler der Näherungswerthe mit den grossen Buchstaben des deutschen, die Nenner mit den grossen Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet, ee ist dann

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \text{zvn} = \frac{\mathfrak{N}\,2n^{-1} + \mathfrak{N}\,(2n-1)^{-2}}{N\,2n^{-1} + N\,(2n-1)^{-2}}$$

wo — 1 und — 2 keine wirklichen, sondern sogenannte, „Distanzexponenten“ bedeuten. Nunmehr ist bereits folgende Aufgabe gelöst worden (a. a. O. S. 31): „Zwo Glieder P, Q, oder ihre Werthe

A, B seyen als Anfangsglieder (oder überhaupt als zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder) einer Reihe gegeben. Die Summe der Produkte, des zweyten Werthes 𝔅 in einen Faktor c und des ersten 𝔄 in c, sollen den folgenden Werth ℭ, und die Summe zwoer ähnlichen Produkte, des neugefundenen Werthes ℭ in d, und des zweiten 𝔅 in b, den nächstfolgenden Werth 𝔇, und das fortgesetzte ähnliche Verfahren, den weiter folgenden Werth 𝔈 u. s. w. alle übrige Werthe. Man soll den Erfolg dieses Verfahrens in einer combinatorischen Involution (1) in Buchstaben und Ziffern, nach dem Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ a & a & b & b & c & c & b & d & e & e & \ldots \end{pmatrix}$$

angeben.“ Hieraus ergiebt sich im obigen Falle

	𝔄	𝔅				
𝔅	1.	4.	6.	8.	10	⟩
		1.	5.	8.	10	⟩
		1.	4.	7.	10	⟩ u. s. w.
		1.	4.	6.	9	⟩
			1.	5.	9	⟩
			u.	s.	w.	

	A	B				
	2.	4.	6.	8.	10	⟩
		3.	6.	8.	10	⟩
B		2.	5.	8.	10	⟩
		2.	4.	7.	10	⟩
			3.	7.	10	⟩ u. s. w.
	2.	4.	6.		9	⟩
		3.	6.		9	⟩
		2.	5.		9	⟩
		u.	s.	w.		

Erstrer Ausdruck giebt den Zähler, letztrer den Nenner.

Betrachtet man die hier vorliegende Lösung unsres Problems, so ist erstens ersichtlich, dass die Benützung der Lokalzeichen auch nicht den geringsten Vortheil bringt; dass vielmehr die bei jeder wirklichen, nicht blos fingirten Berechnung unumgänglich nothwendige Umsetzung derselben in Buchstaben-, resp. Zahlenausdrücke eine völlig zwecklose Umständlichkeit im Gefolge hat. Aber auch ausserdem ist die Bildung der Involutionen nichts weniger als durchsichtig, und die von Hindenburg oben angeführte Aeusserung über Euler's Verfahren dürfte wohl auch für das seinige gelten.

Eine zweite Auflösung Hindenburg's trifft im Wesentlichen mit der vorigen zusammen, nur dass lediglich die Zähler independent hergestellt, die Nenner hingegen aus diesen abgeleitet werden. „Man mache,“ heisst es [18]) „die Involution γ für den Zähler, wie in VIII); aus dieser leite man die Involution δ für den Nenner her, indem man (wie in II) überall in den Complexionen,

wo im Zähler steht $1 \cdot 4$ und $1 \cdot 5$
für den Nenner setzt: $(2 \cdot 4 + 3)$ „ $2 \cdot 5$

alle übrige Faktoren aber der Complexionen des Zählers γ, auch für den Nenner δ unverändert beibehält.“ Offenbar steht diese Methode selbst der vorigen bedeutend nach.

Noch geringren Anspruch auf wirkliche Independenz kann folgendes Verfahren machen. Da die Complexionen des Zählers stets mit $1 \cdot 4$, die des Nenners mit $1 \cdot 5$ beginnen, so drückt man jene zusammen durch $1 \cdot 4\ \mathfrak{S}$, diese durch $1 \cdot 5\ \Sigma$ aus, und erhält so folgende „geschmeidige combinatorische Formel“

$$\text{zvn} = \frac{1 \cdot 4\ \mathfrak{S} + 1 \cdot 5\ \Sigma}{(2 \cdot 4 + 3)\ \mathfrak{S} + 2 \cdot 5\ \Sigma}$$

Immerhin scheint der Autor gefühlt zu haben, dass diese drei Methoden durchaus noch keine genügende Lösung des gestellten Problems seien; er giebt deshalb noch eine „vierte allgemeinste Auflösung: Zerlegung des Zählers und Nenners in Faktoren aller Art.“ Er geht hier wiederum von der schon früher angegebenen Involution aus, welche er in einer übersichtlicheren und anschaulicheren Weise darstellen lehrt. Behält man die früheren Bezeichnungen bei, so ist der mte Werth $M = 1 \cdot 4\ \mathfrak{S} + 1 \cdot 5\ \Sigma$, und ebenso $M^{-1} = 1 \cdot 4\ \mathfrak{S}^{-1} + 1 \cdot 5\ \Sigma^{-1}$, „wo also die Complexionen bis auf 2m und $2m - 1$ für $\mathfrak{S}$ und Σ, und bis auf $2m - 2$ und $2m - 3$ für $\mathfrak{S}^{-1}$ und Σ^{-1} müssen entwickelt werden. Das giebt also den nten Werth des Bruchs nicht blos aus den beyden letzten $(n - 1)$ten und $(n - 2)$ten, sondern allgemeiner vermittelst des mten und $(m - 1)$ten Werths, d. i.“

$$\text{zvn} = \frac{\begin{pmatrix} [1 \cdot 4\ \mathfrak{S} + 1 \cdot 5\ \Sigma] \cdot [2m + 2]\ S \\ -1 \qquad -1 \\ +[1 \cdot 4\ \mathfrak{S} + 1 \cdot 5\ \Sigma] \cdot [2m + 1] \cdot [2m + 4]\ S \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} [(2 \cdot 4 + 3)\ \mathfrak{S} + 2 \cdot 5\ Z] \cdot [2m + 2]\ S \\ -1 \qquad -1 \\ +[(2 \cdot 4 + 3)\ \mathfrak{S} + 2 \cdot 5\ \Sigma] \cdot [2m + 1] \cdot [2m + 4]\ S \end{pmatrix}}$$

Unter $[4]\ S$, $[6]\ S \ldots [2m]\ S$ versteht man jene Faktoren der obigen Involution, welche 4, 6, . . . 2m an der Spitze haben und abgesondert werden können. Selbstverständlich sind alle in dieser Formel vorkommende Zahlen ausschliesslich Lokalzeichen.

Ganz abgesehen von der auch wieder ganz nutzlosen Anwendung der im wirklichen Verwendungsfalle doch unbrauchbaren Lokalzeichen

weist dieses Verfahren zwei bedeutende Nachtheile auf. Einmal nämlich ist dazu vorerst die Bildung jener combinatorischen Involution nöthig, sodann werden Zähler und Nenner nicht auf vollständig unabhängige Weise gebildet, sondern der letztre aus dem erstren abgeleitet — ein Verfahren, welches der Allgemeinheit bedeutenden Eintrag thut.

Hindenburg wendet seine Methode auf die Darstellung des in Lokalzeichen ausgedrückten allgemeinen Kettenbruches

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$$

an. Geht man von der Formel

$$\text{zvn} = \frac{1 \,.\, 4\, \mathfrak{S} + 1 \,.\, 5\, \Sigma}{(2 \,.\, 4 + 3)\, \mathfrak{S} + 2 \,.\, 5\, \Sigma}$$

aus und bildet die Involution, so ergiebt sich

$$\mathfrak{S} = 6 \,.\, 8 \,.\, 10 + 6 \,.\, 9$$
$$\Sigma = 8 \,.\, 10 + 9$$

also, wenn man mit den Symbolen wie mit Zahlen rechnet,

$$\mathfrak{S} = 396$$
$$\Sigma = 34$$

und hieraus

$$\text{zv5} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathrm{E}} = \frac{27 \,.\, 396 + 39 \,.\, 34}{43 \,.\, 396 + 52 \,.\, 34} = \frac{12018}{18796} = \frac{6009}{9398} = 0{,}6393915\ldots$$

In Lokalzeichen wäre sonach in der That die Aufgabe gelöst, allein da die Mathematik so wenig mit Lokalzeichen, als mit combinatorischen Zeichen andrer Art zu rechnen gewohnt ist, so wäre noch die Rückübersetzung dieser Symbole in die gewöhnlichen Ausdrücke der Buchstabenrechnung erforderlich. Da eine Anweisung hiezu nicht ertheilt wird, so kann man auch auf Hindenburg's Methoden das Urtheil anwenden, welches er selbst (s. o.) über Euler's Algorithmus gefällt hatte.

Hindenburg stellte nicht nur selbst Untersuchungen über das Problem der Näherungswerthe an, sondern er veranlasste auch verschiedene seiner Schüler, diesem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit zu widmen. Man glaubte damals bekanntlich in der combinatorischen Analysis ein Universalmittel zur Hebung aller Schwierigkeiten gefunden zu haben; es entstanden die Untersuchungen von Klügel und Pfaff über die Potenzirung des Polynoms, bezüglich Infiniti-

noms: die schon früher viel bearbeitete Aufgabe der Reihenumkehrung ward von Eschenbach und Rothe auf's Neue aufgenommen [19]) und auch die independente Darstellung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs, zu welcher scheinbar Euler's Analyse nicht ausgereicht hatte, wurde der Gegenstand der eifrigen Bemühungen dreier junger Mathematiker aus Hindenburg's Schule. Der eine derselben, der später als Astronom bekannt gewordene Burckhardt, hat sein Verfahren in einer eigenen Schrift [20]) bekannt gemacht; die Gesammtresultate ihrer Forschungen sind niedergelegt in Hindenburg's oben citirter Abhandlung.

Burckhardt's Verfahren ist dem Grundgedanken nach ganz das seines Lehrers. Indem er von dem in Lokalzeichen geschriebenen allgemeinen Kettenbruch ausgeht, nimmt er zuerst alle geraden Zahlen von 4 bis 2n als „Haupt und einzige Complexion der ersten Classe" an, setzt hierauf in dieser Complexion für 4 und 6 die zwischenfallende ungerade 5, statt 6 und 8 die zwischenfallende 7 und so weiter fort, mit Beibehaltung aller übrigen Zahlen, bis man schliesslich zwischen 2n — 2 und 2n die zwischenfallende 2n — 1 substituirt hat. Ist also

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \ldots (2n - 2) \cdot 2n$$

die einzige Complexion der ersten Classe, so bilden die Complexionen zweiter Classe folgende Reihe:

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \ldots (2n - 2) \cdot 2n \\ 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 12 \ldots (2n - 2) \cdot 2n \\ 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \ldots (2n - 2) \cdot 2n \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \ldots (2n - 4) \cdot (2n - 1) \end{array}$$

Aendert man jede der hier stehenden Complexionen ganz in der nämlichen Weise wie oben, indem man nur die Vertauschung mit dem unmittelbar auf die einzige ungerade Zahl der Complexion folgenden Terme beginnt, so erhält man die dritte Complexionsclasse, und so weiter fort jede beliebige Classe. Man erhält so den Zähler in seinen verschiednen Lokalzeichen-Complexionen ausgedrückt. Sucht man des allgemeinen Kettenbruchs 8 ten Näherungsbruch, so verfährt man folgendermassen [21]):

1.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16	Classe I.
1.	5.	8.	10.	12.	14.	16		
1.	4.	7.	10.	12.	14.	16		
1.	4.	6.	9.	12.	14.	16		Classe II.
1.	4.	6.	8.	11.	14.	16		
1.	4.	6.	8.	10.	15.	16		
1.	4.	6.	8.	10.	12.	15		
	1.	5.	9.	12.	14.	16		
	1.	5.	8.	11.	14.	16		
	1.	5.	8.	10.	13.	16		
	1.	5.	8.	10.	12.	15		
	1.	4.	7.	11.	14.	16		Classe III.
	1.	4.	7.	10.	13.	16		
	1.	4.	7.	10.	12.	15		
	1.	4.	6.	9.	13.	16		
	1.	4.	6.	9.	12.	15		
	1.	4.	6.	8.	11.	15		
		1.	5.	9.	13.	16		
		1.	5.	8.	12.	15		Classe IV.
		1.	5.	8.	11.	15		
		1.	4.	7.	11.	15		
			1.	5.	9.	13		Classe V.

Der Nenner wird aus dem Zähler abgeleitet oder auf eine ganz ähnliche Weise unabhängig von diesem bestimmt.

Die Methode Burckhardt's, welche ganz gewissen andren combinatorischen Verrichtungen, z. B. dem Verfahren bei Darstellung der Combinationen zu bestimmten Summen im Discerptionsproblem, nachgebildet ist, hat unläugbare Vortheile vor denen Hindenburg's, ist jedoch ebenfalls nicht independent. Wäre es möglich, irgend eine Complexionsclasse sofort anzuschreiben, ohne alle vorhergehenden bilden zu müssen, so könnte man dasselbe wohl gewissermassen ein independentes nennen, obwohl selbst in diesem Falle die zur Darstellung der Näherungswerthe aufgestellte Regel kein Gesetz zu nennen wäre.

Die Auflösungen Rothe's [22]) führen im Ganzen den nämlichen Weg; nur dass besonders seine „erste Auflösung: Gut geordnete, von einander unmittelbar abhängige Complexionen“ viel schleppender, als diejenige Burckhardt's ist. Nur unbedeutend von der ersten verschieden ist die „zweite Auflösung: Umgekehrt gut geordnete, von einander unmittelbar abhängige Complexionen.“ Schliesslich folgt noch eine „dritte Auflösung: Zusammensetzung der Com-

plexionen durch Schreiben der Lokalzeichen in die Tiefe, oder nach vertikalen Reihen.“ Es wird hier, im Anschluss an den Bruch

$$0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$$

folgende Tafel gebildet:

Zähler		⊙	Nenner	
1	0	1	2	3
3	2	1	4	5
5	4	2	6	7
7	6	3	8	9
9	8	5	10	11
11	10	8	12	13
13	12	13	14	15
15	14	21	16	17
17	16	34	18	19
19	18	55	20	21
21	20	89	22	23

„Jede Zahl in der Colonne ⊙, ist die Summe der beyden nächstvorhergehenden, und zeigt zugleich die Anzahl der Complexionen in den bestimmten Werthen der Brüche an.“ Geht man dann wieder von der ersten Complexion 10. 8. 6. 4. 2. 0 aus, um z. B. den 5ten Näherungswerth zu finden, so werden aus dieser die Anfangszahlen jeder Vertikalreihe des Zahlenschemas genommen, dessen Aufstellung jedes combinatorische Verfahren als Endziel erstrebt. Die Columne ⊙ giebt an, wie oft jede Zahl in jeder einzelnen Verticalreihe vorkommen darf, und unterstützt demnach die Berechnung bedeutend; gleichwohl ist die ganze Methode kaum etwas anderes als ein allerdings sehr geregeltes Zusammensuchen.

Die beste und einfachste Methode ist entschieden die von Töpfer[23]), welche darauf ausgeht, eine möglichst direkte und unabhängige Darstellung der Näherungswerthe zu ermöglichen; da sie von den oft bis zum Uebermasse weitläufigen Schemabildungen viel freier ist, als die übrigen, so nennt sie Hindenburg[24]) selbst „das am meisten abweichende Verfahren.“ In der Kürze dargestellt ist sie folgende.

Hat man den Kettenbruch

$$\frac{a}{1} + \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{1} + \frac{\gamma}{1} + \ldots$$

so bildet man für den $\left\{\begin{matrix}\text{Zähler}\\\text{Nenner}\end{matrix}\right\}$ des gesuchten Werthes aus den Elementen $\left\{\begin{matrix}2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots\ n-1\\1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ n-1\end{matrix}\right\}$ sämmtliche Unionen, Binionen, Ternionen etc. ohne Wiederholung, wobei die kleinste Differenz irgend zweier Elemente höchstens 2 sein darf. Hat man dagegen den Kettenbruch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots$$

so bildet man, wenn n $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist, für den Zähler successive aus den Elementen 2, 3, 4, 5 . . . n alle $\left\{\begin{matrix}0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots\ n-1\\1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\ n-1\end{matrix}\right\}$tionen und nimmt aus diesen zur Bildung des Zählers sämmtliche Combinationen heraus, welche, von der Linken nach der Rechten gezählt, resp. in den geraden und ungeraden Stellen ungerade und gerade Zahlen stehen haben. Entsprechend ist die Bildung des Nenners, nur dass hier alle $\left\{\begin{matrix}1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\ n\\0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots\ n\end{matrix}\right\}$tionen gebildet werden müssen, je nachdem n $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Hat man endlich den ganz allgemeinen Kettenbruch

$$\frac{a}{a} + \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{c} + \frac{\gamma}{d} + \ldots$$

so ergiebt sich folgende „Auflösung. Man mache die Complexionen für Zähler und Nenner, nach den Vorschriften in I und II, beyde für den gesuchten Werth n in III. Die so gefundenen Complexionen der beyderlei Zähler und so auch der Nenner, in der Ordnung und Lage, wie sie hier in I und II stehen, setzt man Glied für Glied, wie Faktoren neben einander: so erhält man dadurch den Zähler und Nenner des gesuchten nten Werthes für III.“

Ohne Zweifel ist diese Auffassung des Problems allen andren vorzuziehen, und es ist nur zu wundern, dass ein verhältnissmässig so elegantes

Verfahren so wenig benützt wurde, während die so ungleich schwerfälligere Darstellung vermittelst der Involutionen so sehr Eingang fand. Soll in irgend einem praktischen Fall ein Näherungswerth wirklich gefunden werden, so wird das Töpfer'sche Verfahren von den hier diskutirten gewiss am brauchbarsten sein; von all den übrigen möchte das nämliche Bedenken gelten, welches Grunert [25]) von der ebenfalls aus der combinatorischen Analysis hervorgegangenen Lokalformel Rothe's zur Reihenreversion folgendermassen ausdrückt: „ob diese ganz allgemeine Formel zur wirklichen Berechnung öfters angewandt ist?" Jedenfalls hat Hindenburg, so hohen Werth er auch auf seine und seiner Schüler Methoden legt, gefühlt, dass das gesteckte Ziel nicht vollständig erreicht sei; wenigstens scheint dieser Sinn in den folgenden Worten [26]) zu liegen, worin er alles über seine „Vorschrift" Gesagte recapitulirt: „Sie zeigt, wie man bey solchen Darstellungen zwar von vorhergehenden Werthen auf folgende, und in so fern dependent von jenen auf diese fortgeht; aber die ganz eigene Art von Zusammensetzung, nach welcher man vorhergehende, und folgende Werthe in und um einander schreibt, lehrt auch, dass diese Dependenz mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig sey, weil man hier für jeden verlangten Werth, blos das für ihn unumgänglich Nöthige thut und nichts schreibt, was nur etwa als Vorbereitung dienlich wäre, nicht aber selbst zu der Sache, die man sucht, gehörte.

In dieser Rücksicht (wie ich auch durchgängig gethan habe) kann man diese und andere ähnliche Darstellungen, als ganz independente betrachten und ansehen. Man kann nämlich für jeden ausser der Ordnung verlangten Werth, die Involution, ohne alle vorgängige Vorbereitung, sogleich einleiten, und selbige auf einem, eben so leicht als geschwind zum Ziele führenden Wege vollenden." Ob die hier vorgetragnen Ansichten wahrhaft strenge Criterien für die Independenz eines analytischen Gesetzes an die Hand zu geben im Stande sind, dürfte zu bezweifeln sein.

16) Hindenburg, Combinatorisches Verfahren, zu Bestimmung der Werthe der continuirlichen Brüche, Leipziger Magazin für Naturkunde und Mathematik, 1781. S. 461; 1782, S. 439.

17) Hindenburg, Ueber combinatorische Involutionen und Evolutionen, und ihren Einfluss auf die combinatorische Analytik. Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 1795. I. S. 13.

18) Hindenburg, Combinatorische Verfahren, zu Bestimmung der Werthe der continuirlichen Brüche, in und ausser der Ordnung, Ibid. S. 56.

19) Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis, nebst einigen verwandten und andern Sätzen, neu bearbeitet und dargestellt, von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg; nebst einem kurzen Abrisse der combinatorischen Analysis — von C. F. Hindenburg, Leipzig 1796.

20) Burckhardt, Methodus combinatorio-analytica, evolvendis fractionum continuarum maxime idonea, Lipsiae 1794.

21) Hindenburg, Comb. Verf. S. 177.

22) Id. Ibid. S. 162, S. 166, S. 171.

23) Id. Ibid. S. 178.

24) Id. Ibid. S. 183.

25) Grunert, Archiv der Mathematik und Physik, XIII. Theil, Literarischer Bericht, S. 702.

26) Hindenburg, Mehrere grosse Mathematiker sind der Erfd. comb. Inv. etc. S. 324.

5. Die von Hindenburg und seiner Schule gegebenen Vorschriften verschafften sich bald allgemeine Geltung; das erste grössere Lehrbuch, welches die gesammte Lehre von den Kettenbrüchen enthält, das von Eytelwein[27]), giebt auch in einer conciseren und übersichtlicheren Weise als Hindenburg eine involutorische Darstellung der Näherungswerthe. Sind N, N_1, N_2 etc. die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche des Kettenbruchs

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \ldots$$

so kann man folgendes von Hindenburg bereits angedeutete Schema construiren:

	N	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
N_1	α	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	. . .
N_2		α	α_2	α_3	a_4	a_5	a_6	. . .
N_3		α	α_1	α_3	α_4	a_5	a_6	. . .
		α	a_1	a_2	α_4	a_5	a_6	. . .
N_4			α	α_2	α_4	a_5	a_6	. . .
		α	a_1	a_2	a_3	α_5	a_6	. . .
			α	α_2	a_3	α_5	a_6	. . .
N_5			α	α_1	α_3	α_5	a_6	. . .
		α	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	. . .
			α	α_2	α_3	α_4	α_6	. . .
			α	a_1	α_3	a_4	α_6	. . .
			α	a_1	a_2	α_4	α_6	. . .
N_6				α	α_2	α_4	α_6	. . .
			.	.	.	.	.	.

Dieses Schema lässt sich beliebig weiter fortsetzen, „wenn man neben den vertikalen Strich, den nächstfolgenden Nenner des Ergänzungsbruches, und unter den wagerechten Strich, sämmtliche im zweyten nächstvorgehenden Winkelhaken enthaltene Grössen, nach eben der Ordnung, hinschreibt, und solchen auf der rechten Seite den nächstfolgenden Zähler des Ergänzungsbruches als Faktor, zusetzt."

Auch Stern [28]) bedient sich eines ähnlichen Schema's, um ein independentes Gesetz herzustellen. Hat man den Kettenbruch

$$a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

so hat man zur gemeinschaftlichen Darstellung des Zählers wie Nenners nur das Tableau

a	a_1	a_2	a_3	a_4
a	a_1	a_2		b_4
a	a_1	b_3		a_4
a	b_2		a_3	a_4
a	b_2			b_4
b_1		a_2	a_3	a_4
b_1			a_2	b_4
b_1		b_3	b_3	b_4

zu bilden, aus dem sich unmittelbar das Gesetz des Fortgangs erkennen lässt; es ist z. B. der vierte Näherungswerth

$$F(a,a_4) = \frac{a\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4 + a\,a_1\,b_3\,a_4 + a\,a_1\,b_3\,a_4 + a\,b_2\,a_3\,a_4 + a\,b_2\,b_4 + b_1\,a_2\,a_3\,a_4 + b_1\,a_2\,b_4 + b_1\,b_3\,a_4}{a_1\,a_2\,a_3\,a_4 + a_1\,a_2\,a_4 + a_1\,b_3\,a_4 + b_2\,a_3\,a_4 + b_2\,b_4}$$

Die von Stern gegebene Vorschrift ist offenbar von allen, welche wir bis jetzt kennen gelernt haben, die einfachste und bequemste; auch wird sie nicht blos als ein eleganter Kunstgriff ohne Anwendung hingestellt, sondern Stern benützt sie zur Bestimmung der Gliederzahl jedes Aggregates, durch welches Zähler und Nenner eines Kettenbruches dargestellt werden [29]).

Immerhin fehlt diesen sämmtlichen Methoden, abgesehen von der wenig zweckmässigen Bezeichnungsweise, noch ein Hauptcharakteristikum eines wirklich independenten Gesetzes. Betrachten wir einen beliebigen endlichen Kettenbruch, so ergiebt schon der blosse

Anblick, dass sich derselbe nach den gewöhnlichen recurrirenden Weisen, sowohl von vorne als von hinten, mit gleicher Bequemlichkeit berechnen lassen müsse, und zwar findet sich diess durch die Praxis bestätigt. Lejeune-Dirichlet hat in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie sogar gezeigt, dass es mitunter weit bequemer sei, in letztrer Weise zu operiren [30]). „Soll", heisst seine Regel, „der rte Näherungsbruch berechnet werden, so stelle zunächst die Quotienten, von hinten nach vorn genommen, vom rten an bis zum ersten der Reihe nach in einer horizontalen geraden Linie von links nach rechts auf; bilde eine zweite horizontale Reihe darunter, in welcher α_r unter α_r und vor diesem noch die Zahl 1 zu stehen kommt, auf die Weise, dass jedes folgende Glied entsteht, indem man den darüber befindlichen Quotienten mit dem nächst vorangehenden Gliede der zu bildenden Reihe multiplicirt und zum Produkte das zweit vorangehende Glied dieser Reihe addirt. Alsdann ist das vorletzte Glied dieser Reihe der Zähler A_r und das letzte der Nenner B_r des verlangten Näherungsbruches." Während es demnach als ein sichres Kennzeichen eines wahrhaft unabhängigen und zweckmässigen Verfahrens erscheint, die wirkliche Berechnung des aufgestellten Ausdrucks mit gleicher Bequemlichkeit von beiden Seiten her beginnen zu können, gestatten alle die vermittelst combinatorischer Involutionen gewonnenen allgemeinen Ausdrücke nur die eine Berechnungsweise.

Die Schwierigkeit, wahrhaft independente Gesetze zu finden, scheint manche Schriftsteller vermocht zu haben, die Aufstellung solcher Ausdrücke überhaupt zu umgehen und sich lediglich mit in Worten ausgedrückten Regeln zu begnügen. So giebt z. B. Liebl ein [31]) folgende Regel, den nten Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ des allgemeinen Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

zu finden: Um p_n zu erhalten, gehe man von dem Gliede $a_2a_3a_4 \ldots a_n b_1$ aus und ersetze in diesem a_2a_3 durch b_3, so erhält man $a_4 \ldots a_n b_1b_3$ als zweites Glied des Ausdrucks. Nun ersetze man a_3a_4 durch b_4, wodurch man das dritte Glied $a_2a_5 \ldots a_n b_1b_4$ findet. In den bereits gefundenen Gliedern ersetze man ferner a_4a_5 durch b_5, dann in sämmtlichen bereits gebildeten, wo es angeht,

$a_5 a_6$ durch b_6 u. s. f., bis man zuletzt in allen Gliedern, wo es angeht, a_{n-1} a_n mit b_n vertauscht. Die Summe aller so gefundenen Ausdrücke ist p_n. Auf ähnliche Weise wird q_n gebildet." Das Verfahren ist, wie man sieht, ganz dasselbe wie die oben geschilderten von Burckhardt und Rothe.

Noch in neuester Zeit hat Minding [32]) eine Methode angegeben, die Näherungswerthe des in der Dioptrik wichtigen Gauss'schen Kettenbruches zu bestimmen. Hat man den Kettenbruch

$$u^0 + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{u''} + \ldots$$

wo $k = (u^0, t', u', t', u'') + \ldots$, so empfiehlt sich zur Bildung des Ausdrucks folgendes allgemeine Gesetz: „Unter der Voraussetzung einer ungraden Anzahl von Gliedern bilde man aus den ungraden Stellen derselben (also aus den u^0, $u' \ldots$) alle Combinationen (Unionen, Amben, Ternen etc.), wobei man dieselbe nach steigenden Indices zu ordnen hat, und schiebe zwischen dieselben die Summe der zwischen ihnen liegenden graden Stellen (der t', $t'' \ldots$) ein. Die Summen der so gebildeten Glieder constituiren den Werth des Kettenbruchs." Alle Zeichen haben die bekannte, von Gauss [33]) eingeführte Bedeutung. Diese Methode ist, selbst im Wortausdruck, nahezu identisch mit derjenigen von Töpfer (s. o.).

Unter diesen combinatorischen Darstellungen wäre schliesslich noch aufmerksam zu machen auf die von Bartholomaei [34]). Unter einer „alternirenden Combination versteht man eine solche, in welchen eine Klasse — das Wort im weiteren Sinne, nämlich auch für die Klassen einer Klasse gebraucht — um die andere übersprungen ist." Ist also $\overset{m}{C}_{r.t}$ die Gesammtbezeichnung für die alternirenden Combinationen vom rten bis tten Partialnenner, so ergiebt sich der Nenner des 2nten Näherungsbruchs

$$B_{2n} = \frac{\frac{2n}{1.2n}C + \frac{2n-2}{1.2n}C + \frac{2n-4}{1.2n}C + \ldots + \frac{2}{1.2n}C + \frac{0}{1.2n}C}{\frac{2n-1}{2.2n}C + \frac{2n-3}{2.2n}C + \frac{2n-5}{2.2n}C + \ldots + \frac{3}{2.2n}C + \frac{1}{2.2n}C}$$

der des (2n + 1)ten

$$B_{2n+1} = \frac{\frac{2n+1}{1}C + \frac{2n-1}{1}C + \frac{2n-3}{1}C + \ldots + \frac{3}{1}C + \frac{1}{1}C}{\frac{2n}{2}C + \frac{2n-2}{2}C + \frac{2n-4}{2}C + \ldots + \frac{2}{2}C + \frac{0}{2}C}$$

Es ist nicht zu leugnen, dass vermittelst dieser neu eingeführten Bezeichnung der allgemeine Ausdruck eine ganz elegante Form erhält; um so schleppender gestaltet sich die wirkliche Auswerthung in praktischen Fällen.

Auch noch an einem andren Orte [35]) hat schliesslich Minding sein Verfahren veröffentlicht; es lässt sich [36]) dahin zusammenfassen: „Um $(u_0 . t_1 u_1 . t_2 u_2 \ldots t_s u_s)$ zu bilden, formt man die Summe der Produkte der u zu je 1, 2, 3, . . . und multiplicirt jedes u_λ u_μ mit der Summe der zwischen u_λ und u_μ befindlichen t, z. B. $u_0 u_3 u_4 u_7$ mit $(t_1 + t_2)\ t_4\ (t_5 + t_6 + t_7)$."

Erst in neuerer Zeit hat man angefangen, einem combinatorischen Symbol Vertrauen zu schenken, welches, nachdem sein Gebrauch in kurzer Zeit von schwachen Anfängen bis zu einer ganz neuen analytischen Theorie sich ausgebildet hatte, für Auffindung independenter Gesetze sich besonders günstig zu erweisen schien — den Determinanten. Der grosse Vortheil, den sie darboten, bestand hauptsächlich darin, dass die Rechnung mit Determinanten durchaus keine Schwierigkeiten verursacht und demnach eine Darstellung der Näherungswerthe in Determinantenform nicht nur als unvermittelter Kunstgriff dasteht, sondern auch ein neues Behandlungsmittel für die ganze Lehre von den Kettenbrüchen gewährt.

27) Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, Berlin 1824. 1. Band, S. 340.

28) Stern, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1833. 10. Band, S. 5.

29) Ibid, S. 8.

30) Emsmann, Mathematische Excursionen, Halle 1872. S. 106.

31) Lieblein, Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis, Prag 1867. S. 176.

32) Minding, Tageblatt der 44ten Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, Rostock 1871. S. 50.

33) Gauss. Dioptrische Untersuchungen. Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 1. 1843.

34) Bartholomaei, Grunert's Archiv XVIII. Theil, S. 328.

35) Minding, Loi de la formation des dénominateurs et des numérateurs pour la reduction des fractions continues en fractions ordinaires, Bull. de St. Petersbourg, XIII. 1869.

36) Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, 2. Band. Heft 1. Berlin 1872. S. 105.

6. Die erste Idee, die Betrachtungsweise der Lehre von den Kettenbrüchen durch Einführung der Determinanten zu vervollkommnen, scheint dem dänischen Mathematiker Ramus [37]) anzugehören.

In dem Memoire, welches er hierüber der dänischen Akademie einreichte, heisst es (deutsch übersetzt): „Herr Professor Ramus theilte nachfolgende Bemerkungen mit zur Anwendung der Determinanten für Aufstellung von Regeln für convergirende (Ketten-) Brüche." Es heisst dann weiter: „Angenommen, es wäre gegeben der Kettenbruch

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots$$

welcher sich kürzer durch

$$a_0, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \ldots$$

bezeichnen lässt . . . es kommt hierbei nur darauf an, eine Regel zu finden, für die eine dieser zwei Reihen (Zähler und Nenner) . . . Bekanntlich ist y_r allgemein bestimmt durch die zwei vorhergehenden Glieder y_{r-1} und y_{r-2}, vermittelst des bekannten Satzes: $y_r = a_r y_{r-1} + b_r y_{r-2}$, und ebenso z_r, so dass man also die Glieder successive bestimmen kann, wenn der Kettenbruch vorliegt; aber zugleich ergiebt sich in Folge dieser Formel, indem man nacheinander $r = 0, 1, 2 \ldots n$ setzt, ein System von linearen Gleichungen; in Folge dessen giebt der obige Ausdruck eine allgemeinere Bestimmung für y_r. Die Coëfficienten

$$a^i, a_1{}^i, a_2{}^i \ldots a^i{}_n$$

sind bestimmt durch folgendes Schema — die horizontalen Linien entsprechen dem $i = 0, 1, 2 \ldots n$, während die vertikalen den Coëfficienten für die obenstehend geschriebenen $y_0, y_1, y_2 \ldots$ entsprechen:"

y_0	y_1	y_2	y_3	. . .	y_{n-3}	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
1	0	0	0	. . .	0	0	0	0
$-a_1$	1	0	0	. . .	0	0	0	0
$-b_2$	$-a_2$	1	0	. . .	0	0	0	0
0	$-b_3$	$-a_3$	1	. . .	0	0	0	0
.	.	.	.	. . .	.	.	.	.
0	0	0	0	. . .	1	0	0	0
0	0	0	0	. . .	$-a_{n-2}$	1	0	0
0	0	0	0	. . .	$-b_{n-1}$	$-a_{n-1}$	1	0
0	0	0	0	. . .	0	$-b_n$	$-a_n$	1

Dieses Schema könnte offenbar mit Leichtigkeit zu einer Determinante umgestaltet werden, ist jedoch an und für sich noch keine. Ramus stellt auch seine Determinanten nicht in der für die Lehre von den Kettenbrüchen nicht zu umgehenden quadratischen Form dar, sondern schreibt nach alter Weise:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= -\Sigma \pm a^n a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} \\ A^1{}_n &= -\Sigma \pm a\ a_1^n a_2^2 a_3^3 \ldots a_{n-1}^{n-1} \end{aligned}\right\}$$

eine Bezeichnungsweise, durch welche er sich des grössten Theiles der Vorzüge, welche die richtige Benützung seines glücklichen Gedankens gebracht hätte, begiebt, so dass im weitren Verlaufe seiner verschiednen Sätzen der Kettenbruchlehre gewidmeten Abhandlung der Nutzen der Determinanten durchaus nicht in das rechte Licht gestellt wird.

Unabhängig von Ramus fand Heine, dass der Nenner (und sonach auch der Zähler) jedes Näherungsbruches in Gestalt einer Determinante dargestelt werden kann.

Painvin [38]) hatte gefunden, dass die Determinante eines gewissen Systems in der Form

h_0	$\sqrt{k_0 g_1}$	0	0	. . .
$\sqrt{k_0 g_1}$	h_1	$\sqrt{k_1 g_2}$	0	. . .
0	$\sqrt{k_1 g_2}$	h_2	$\sqrt{k_2 g_3}$	. . .
0	0	$\sqrt{k_2 g_3}$	h_3	. . .
.	.	.	.	. . .
0	0	0	0	. . .
0	0	0	0	. . .
0	0	0	0	. . .
0	0	0	0	. . .

0	0	0	. . .
$h_{\sigma-3}$	$\sqrt{k_{\sigma-3} g_{\sigma-2}}$	0	. . .
$\sqrt{k_{\sigma-3} g_{\sigma-2}}$	$h_{\sigma-2}$	$\sqrt{k_{\sigma-2} g_{\sigma-1}}$	. . .
0	$\sqrt{k_{\sigma-2} g_{\sigma-1}}$	$h_{\sigma-1}$	$\sqrt{k_{\sigma-1} g_\sigma}$
0	0	$\sqrt{k_{\sigma-1} g_\sigma}$	h_σ

dargestellt werden könne, eine Eigenschaft dieses Systems, welche Heine[39]) zur Behandlung gewisser Lamé'scher Funktionen benützt, ohne noch ihren nahen Zusammenhang mit den Kettenbrüchen zu bemerken. Bei einer erneuten Bearbeitung dieser Funktionen ergiebt sich ihm die Determinante[40])

$$\begin{vmatrix}
k-c_0^2 & kc_0c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
kc_0c_1 & z-c_1^2-c_2^2 & kc_2c_3 & & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & kc_2c_3 & z-c_3^2-c_4^2 & kc_4c_5 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & kc_4c_5 & z-c_5^2-c_6^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z-\underset{2\sigma-7}{c^2}-\underset{2\sigma-6}{c^2} & \underset{2\sigma-6}{kc}\ \underset{2\sigma-5}{c} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \underset{2\sigma-6}{kc}\ \underset{2\sigma-5}{c} & z-\underset{2\sigma-5}{c^2}-\underset{2\sigma-4}{c^2} & \underset{2\sigma-4}{kc}\ \underset{2\sigma-3}{c} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underset{2\sigma-4}{kc}\ \underset{2\sigma-3}{c} & z-\underset{2\sigma-3}{c^2}-\underset{2\sigma-2}{c^2} & \underset{2\sigma-2}{kc}\ \underset{2\sigma-1}{c} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \underset{2\sigma-2}{kc}\ \underset{2\sigma-1}{c} & z-\underset{2\sigma-1}{c^2}-\underset{2\sigma}{c^2}
\end{vmatrix}$$

als Nenner des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{z-\underset{2\sigma}{c^2}-\underset{2\sigma-1}{c^2}-\cfrac{\underset{2\sigma-1}{k^2-c^2}\ \underset{2\sigma-2}{c^2}}{z-\underset{2\sigma-2}{c^2}-\underset{2\sigma-3}{c^2}-\cfrac{\underset{2\sigma-3}{k^2-c^2}\ \underset{2\sigma-4}{c^2}}{\ddots-\cfrac{k^2c_3^2c_2^2}{z-c_2^2-c_1^2-\cfrac{k^2c_1^2c_0^2}{z-c_0^2}}}}}$$

Allein auch hier wird diese Bemerkung ohne Anwendung gelassen; obwohl Heine [41]) sehr bald sich wiederum mit den Kettenbrüchen beschäftigte, benützte er doch die Determinanten nicht mehr. Eine kurze hierher gehörige Notiz findet sich auch bei Spottiswoode[42]), ohne dass jedoch irgend ein weitrer Gebrauch von derselben gemacht würde. Es heisst daselbst: „The improper continued fraction

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B - \frac{1}{C - \ldots}} = \frac{d}{dA} \log \nabla,$$

where

$$\nabla = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & M & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & N \end{vmatrix}$$

in which any number of rows may be taken at pleasure, and the formula will give the corresponding convergent fraction.

The same holds good for the continued fraction

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \ldots$$

if we write

$$\nabla = \begin{matrix} A & 1 & 0 & \ldots & \text{“} \\ -1 & B & 1 & \ldots & \\ 0 & -1 & C & \ldots & \\ & & \ldots & & \end{matrix}$$

37) Determinanternes Anvendelse til at bestemme Loven for de convergerende Bröker, Det Kong. Danske Vidensk. Selsk, naturv. og math. Afhandl. Kjöbenhavn 1855. S. 106.

38) Heine, Auszug eines Schreibens über die Lamé'schen Funktionen an den Herausgeber, Crelle's Journal, 1859. 56. Band. S. 79.

39) Ibid. S. 80.

40) Heine, Einige Eigenschaften der Lamé'schen Funktionen, ibid. S. 97.

41) Heine, Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen, Crelle's Journal, 1860. 57. Band, S. 231.

42) Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, Crelle's Journal, 1856. 51. Band. S. 374.

7. Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass auch Möbius [43]) sich mit der Aufstellung eines independenten Gesetzes beschäftigte. Er gieng nicht von dem gewöhnlichen Kettenbruche aus, dessen sämmtliche Glieder positiv sind, sondern von der Form

$$\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} - \ldots$$

welche für seine Zwecke bequemer war. Er bedient sich eines Algorithmus, ganz ähnlich dem Euler'schen. Hauptsächlich war es das Einschalten verschiedener Glieder in den Kettenbruch, worauf er sein Augenmerk richtete; ausserdem bediente er sich noch desselben in einer Abhandlung optischen Inhalts, deren Bestimmung er selbst in folgenden Worten ausspricht: „Zum Schluss habe ich noch die oben gedachten Sätze von den bei jedem Gläsersystem im Allgemeinen angebbaren zwei Brennpunkten und Brennweiten und von den daraus zu berechnenden Wirkungen des Systems, sowie auch die Haupteigenschaften der Fernröhre auf eine neue, der Einfachheit dieser Sätze entsprechende, ganz elementare Weise dargethan“ [44]).

43) Möbius, Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts, Crelle's Journal 1828. 3. Band. S. 215.

44) Möbius, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern, Crelle's Journal. 1827. 2. Band. S. 113.

Kapitel II.

Darstellung der Zähler und Nenner jedes Näherungsbruches in Determinanten-Form.

8. Bekanntlich hat Scheibner [45]) zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass der einfachste und naturgemässeste Weg, zu den Kettenbrüchen zu gelangen, durch Betrachtung gewisser recurrirender Gleichungen dargeboten wird. Ist eine Anzahl von Termen durch folgende Reihe von Gleichungen verbunden, welche eine Berechnung der Grössen a, b, . . . successive gestatten,

$$\begin{aligned} a &= bq + c \\ b &= cr + d \\ c &= ds + e \\ &\vdots \end{aligned}$$

so erhält man

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \ldots}}}$$

und ebenso, wenn man allgemein hat

$$\begin{aligned} p_1 u - q_1 u_1 + u_2 &= 0 \\ p_2 u_1 - q_2 u_2 + u_3 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

so findet sich

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1 - \frac{p_2}{q_2 - \frac{p_3}{q_3 - \ldots}}}$$

Gesetzt nun, man habe folgendes System von 5 linearen Gleichungen aufzulösen.

$$\begin{aligned} ax - y &= A \\ bx + cy - z &= 0 \\ dy + ez - u &= 0 \\ fz + gu - v &= 0 \\ hu + iv &= 0 \end{aligned}$$

so findet man, dem obigen gemäss, für x den Kettenbruch

$$\frac{A}{a} + \frac{b}{c + \frac{d}{e + \frac{f}{g + \frac{h}{i}}}}$$

Sucht man andrerseits nach bekannten Regeln [46]) für x seinen Werth als Quotienten zweier Determinanten, so erhält man

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f & g & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f & g & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h & i \end{vmatrix}}$$

Setzen wir die beiden für x erhaltenen Werthe einander gleich, so ergiebt sich uns induktorisch sofort folgender

Lehrsatz. Ist p_n der Zähler, q_n der Nenner des nten Näherungsbruches des Kettenbruchs

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots$$

so ist stets, unter M, N . . S beliebige Zahlen verstanden,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & M & N & P \ldots & S \\ 0 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_n & a_n \end{vmatrix}}$$

Beweis. Derselbe ist nur für den Nenner zu führen, indem derjenige für den Zähler ganz analog ist. Bekanntlich hat man, um auf recurrirende Weise den Zähler und Nenner des nten Näherungsbruches zu finden,

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$$
$$q_n = a\ q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

Der obigen Darstellungsweise entsprechend ist nun offenbar

$$q_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} \qquad q_{n-2} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Zerlegt man hingegen die oben für q_n hypothetisch angenommene Determinante auf bekannte Weise [47]) in Unterdeterminanten, so erhält man sofort, unter $\triangle$ die supponirte Determinante des Nenners verstanden,

$$\triangle = a_n \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

und mit Berücksichtigung der vorigen Relationen,

$$\triangle = a_n q_{n-1} + b_n q_n$$

Dem Comperationsgrundsatze gemäss ist nun also

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots b_n & a_n \end{vmatrix} = q_n \ldots . A$$

Ist somit der Satz für den (n—2) ten und (n— 1) ten Nenner wahr, so gilt er auch für den n ten, nun ist aber

$$a_1 = a_1$$
$$a_1 a_2 + b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

sonach ist die allgemeine Gültigkeit unsres Theorems erwiesen. Anstatt der oben willkürlich angenommnen Terme M, N . . . S werden wir in der Folge gewöhnlich 0 setzen, was nach einem bekannten Satze [48]) der Lehre von den Determinanten gestattet ist.

In ähnlicher Weise findet sich die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Unbekannten durchgeführt bei Kötteritsch [49]); da aber dort von unendlich vielen Gleichungen die Rede ist, würden die Determinanten unendlich werden.

45) Scheibner, Einige Bemerkungen über recurrirende Gleichungen, Günther, Darstellung der Näherungswerthe.

welche auf Kettenbrüche führen, Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1864. S. 44.

46) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 64.

47) Ibid. S. 27.

48) Ibid. S. 9.

49) Kötteritsch, Ueber die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen, Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15. Jahrg. S. 238.

9. Die hier gegebne Determinante, welche wir in der Folge mit dem Namen „Kettenbruchdeterminante“ bezeichnen wollen, zeichnet sich durch ihre vielfache Verwendbarkeit aus, indem sie sich ohne weiteres in verschiedne Formen bringen lässt, je nach dem speciellen Zweck der Untersuchung. Zunächst ist klar, dass die Terme $b_2\ b_3 \ldots b_n$ mit den ihnen gegenüberstehenden negativen Einheiten beliebig vertauscht, oder selbst negativ genommen werden können, wofür dann die Einheit das positive Vorzeichen erhält. So ist z. B. unsre Determinante, welcher wir den Namen der „Normalform“ beilegen können, gleich der folgenden

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -b_2 & a_2 & b_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & -b_4 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . . & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . . & -b_n\ a_n \end{vmatrix} \ldots\ldots B$$

Ferner ist klar, dass wir ihr auch die folgende Gestalt geben dürfen

$$\begin{vmatrix} a_1 & M & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ N & a_2 & P & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q & a_3 & R & \ldots & 9 \\ 0 & 0 & S & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . . & a_{n-1}\ Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . . & Z\ a_n \end{vmatrix} \ldots\ldots C$$

wofern nur folgende Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} MN &= -b_2 \\ PQ &= -b_3 \\ RS &= -b_4 \\ &\vdots \\ YZ &= -b_n \end{aligned}$$

Die eleganteste Form wird unsre Kettenbruchdeterminante offenbar dann annehmen, wenn wir stets die beiden Faktoren M, N...Y, Z entgegengesetzt gleich werden lassen, also $M = -N = \sqrt{b_2} \ldots Y = -Z = -\sqrt{b_n}$ voraussetzen. Wir erhalten alsdann den Nenner in der Gestalt, wie ihn Heine (s. o.) bereits in einem speciellen Falle dargestellt hat, nämlich in der folgenden

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & -\sqrt{b_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_2} & a_2 & -\sqrt{b_3} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & -\sqrt{b_4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & -\sqrt{b_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{b_n} & a_n \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist besonders deshalb wichtig, weil sie eine sogenannte „gauche symmetrique“ ist, bei welcher allgemein

$$a_{ki} = -a_{ik}$$

ist [50]). Wir wollen im Folgenden statt dieses wenig bezeichnenden Namens für diese Determinanten mit Studnicka [51]) uns des Ausdrucks: „symmetrale Determinanten“ bedienen.

Diese Determinante lässt sich mit Leichtigkeit auch in eine solche verwandeln, deren Diagonalglieder, ohne dass sie darum aufhört, eine symmetrale zu sein, sämmtlich unter sich gleich sind. Es bedarf hiezu nur des Satzes [52]), dass man in jedem Kettenbruche, ohne seinen Werth zu ändern, einen beliebigen Theilzähler, den darauf folgenden Theilnenner und den wiederum auf diesen folgenden Theilzähler mit einem und demselben beliebigen Ausdruck multipliciren oder dividiren darf. Dieser Satz ist auch auf gewöhnlichem Wege leicht zu beweisen; jedoch ist es als ein wesentlicher Nachtheil zu bezeichnen, dass man, wie Stern [53]) ausdrücklich hervorhebt, den Beweis für endliche und unendliche Kettenbrüche getrennt führen muss; hat man jedoch den Kettenbruch als

Quotienten zweier endlicher oder unendlicher Determinanten ausgedrückt, und soll vom rten Theilzähler ab die genannte Operation vorgenommen werden, so gebe man diesem Quotienten folgende Form (B), wo P jede Zahl (ausgenommen 0) sein kann

$$P.\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & b_{r-1} & a_{r-1} & b_r & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \ldots \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \; a_n \end{vmatrix}$$

I.

$$P.\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & b_{r-1} & a_{r-1} & b_r & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \ldots \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \; a_n \end{vmatrix}$$

und da bekanntlich eine Determinante dadurch mit einer Zahl multiplicirt wird, dass man eine ihrer horizontalen oder vertikalen Reihen mit der Zahl multiplicirt [54]), so kann man den vorigen Quotienten auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & Pb_{r-1} & Pa_{r-1} & Pb_r & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \ldots \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \; a_n \end{vmatrix}$$

II.

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & Pb_{r-1} & Pa_{r-1} & Pb_r & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_r & \ldots \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \; a_n \end{vmatrix}$$

Aus I. und II. ergiebt sich aber unmittelbar folgende Relation:

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_{r-1}}{a_{r-1}}+\frac{b_r}{a_r}+\ldots+\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{Pb_{r-1}}{Pa_{r-1}}+\frac{Pb_r}{a_r}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}$$

einerlei, ob n endlich ist oder nicht.

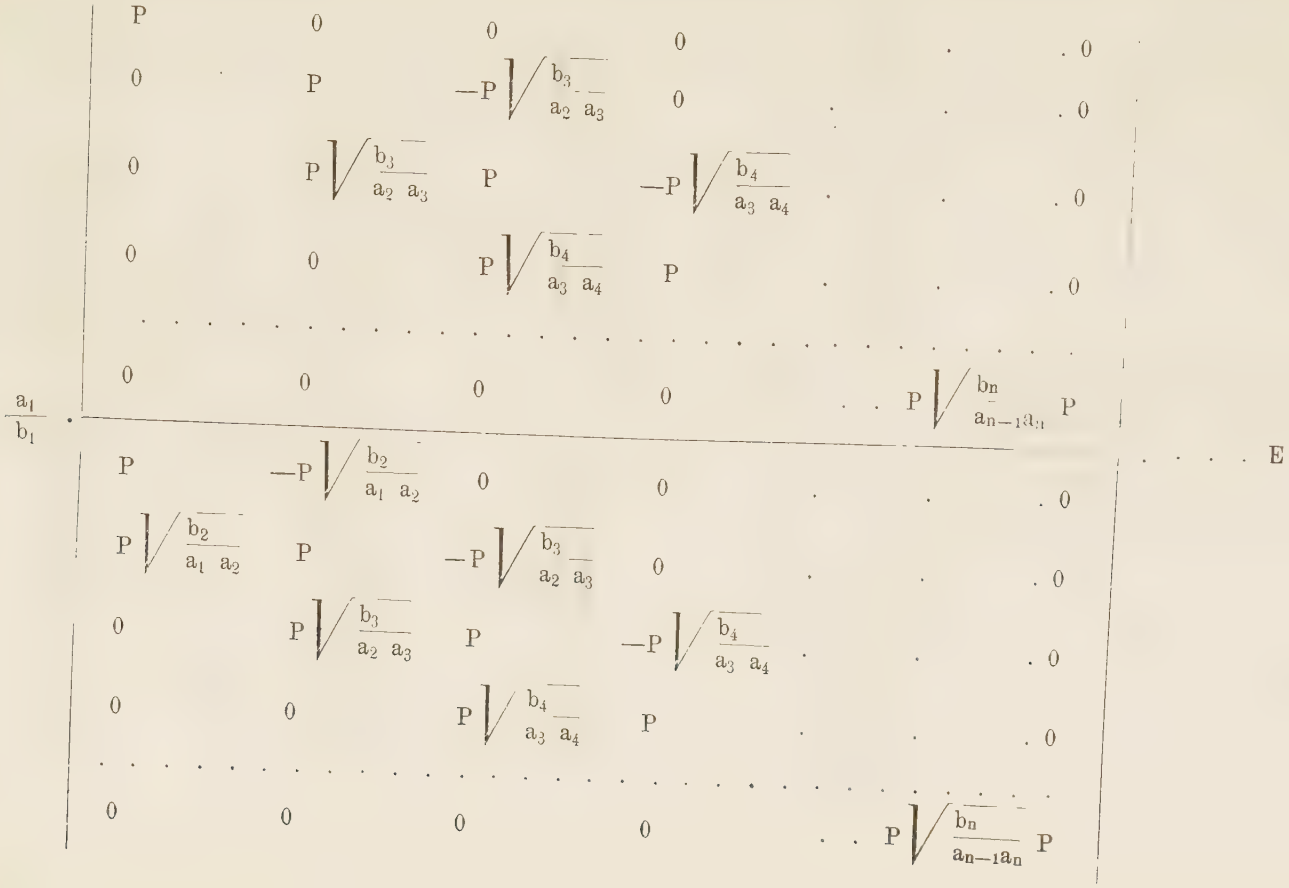
Mit Hülfe dieses Satzes ist es nun leicht, eine Determinante der geforderten Art herzustellen. Denn wir sehen sofort, dass, wenn wir z. B. den Kettenbruch

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}+\ldots$$

in einen andren verwandeln wollen, dessen sämmtliche Theilnenner alle $= P$ sind, so ergiebt uns eine einfache successive Division, dass dieser Kettenbruch dem folgenden

$$b_1\frac{P}{a_1}+\cfrac{b_2\frac{P^2}{a_1\,a_2}}{P+\cfrac{b_3\frac{P^2}{a_2\,a_3}}{P+\ldots+\cfrac{b_n\frac{P^2}{a_{n-1}\,a_n}}{P+\ldots}}}$$

gleich ist. Schreiben wir aber diesen Kettenbruch als Quotienten zweier symmetralen Determinanten, so erhalten wir



Diese Determinanten haben nun offenbar alle Eigenschaften einer symmetralen Form.

50) Baltzer, S. 57.

51) Studnicka, Einleitung in die Theorie der Determinanten, Prag 1871. S. 47.

52) Stern, S. 14.

53) Ibid. S. 155.

54) Baltzer, S. 13.

10. Sehr leicht ist es, von den hier aufgestellten Formen auf diejenigen überzugehen, welche mitunter in der Praxis vorkommen. Um z. B. für den Kettenbruch

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2 +} \; \ldots \; + \frac{b_n}{a_n}$$

den independenten Ausdruck aufzustellen, hat man nur zu der Form A (Normalform) den Term a_0 zu addiren, der Nenner bleibt folglich ungeändert, während der Zähler der Summe

$$\begin{vmatrix} b_1 & -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & b_n \; a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 a_0 & -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & b_n \; a_n \end{vmatrix}$$

gleich ist. Da diese beiden Determinanten mit Ausnahme der ersten Colonne (Vertikalreihe) ganz identisch sind, so kann man sie sofort summiren [55]); als Summe erhält man

$$\begin{vmatrix} b_1 + a_1 a_0 & -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

Diese Determinante vom nten Grad lässt sich leicht in eine solche vom (n + 1)ten verwandeln. Bezeichnet man nämlich die beiden in der obigen Determinante durch Winkelhaken abgetrennten Determinanten durch M und m, so hat man, wenn R die Determinante selbst bedeutet,

$$R = (b_1 + a_1 a_0) M + a_0 b_2 m$$

Betrachten wir hingegen die Determinante $(n+1)$ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n\ a_n \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich durch Zerlegung in Unterdeterminanten sofort ebenfalls

$$\triangle = (b_1 + a_1 a_0) M + a_0 b_2 m$$

und hieraus

$$R = \triangle.$$

Derjenige Kettenbruch, dessen sämmtliche Theilzähler negative Zahlen sind, lässt sich stets als Quotient zweier symmetrischer Determinanten darstellen, für welche

$$a_{ik} = a_{ki}$$

ist. Man hat

$$\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3} - \ldots - \frac{b_n}{a_n} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \sqrt{b_3} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & \sqrt{b_4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{b_n}\ a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \sqrt{b_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_2} & a_2 & \sqrt{b_3} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & \sqrt{b_4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_4} & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{b_n}\ a_n \end{vmatrix}}$$

Bekanntlich lässt sich jede symmetrale Determinante auch in einer nach ab- oder aufsteigenden Potenzen des Diagonalgliedes fortlaufenden Reihe darstellen [56]). Gehen wir also von der Form E) aus, so erhalten wir den nten Näherungsbruch des Kettenbruchs

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}$$

folgendermassen als Quotienten zweier Polynome dargestellt:

$$\frac{P^n + P^{n-2}\,\Sigma D_2 + P^{n-4}\,\Sigma D_4 + \ldots}{P^n + P^{n-2}\,\Sigma \Delta_2 + P^{n-4}\,\Sigma \Delta_4 + \ldots}$$

wobei sowohl D_m als Δ_m symmetrale Determinanten mit leerer Diagonale sind. Jede derartige Determinante ist aber stets ein vollständiges Quadrat [57]), so dass also die Coëfficienten von P^q Summen von Quadraten vorstellen. Nimmt man $P = 1$ an, so bekommt der n te Näherungsbruch folgende einfachere Gestalt:

$$\frac{1 + \Sigma^{I} Q + \Sigma^{II} Q + \ldots}{1 + \Sigma^{I} q + \Sigma^{II} q + \ldots}$$

Auch die andre (negative) Form der Kettenbrüche lässt sich derart in entwickelter Gestalt geben, indem auch für die symmetrischen Determinanten ähnliche Formeln existiren.

Diese entwickelten Darstellungen der Näherungsbrüche dürften bei Convergenzuntersuchungen nützlich sein, indem bekanntlich jeder Kettenbruch sich in eine Reihe entwickeln lässt, in der ausschliesslich die Nenner der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche vorkommen, eine explizite Darstellung derselben aber nicht möglich schien.

55) Baltzer, S. 15.
56) Ibid. S. 62.
57) Ibid. S. 57.

11. Ganz ähnlich, wie die absteigenden Kettenbrüche lassen sich auch die aufsteigenden behandeln. Betrachtet man den aufsteigenden Kettenbruch

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots + \frac{\omega}{z}$$

und sucht man recurrirend seine Näherungswerthe zu bestimmen, so findet sich

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha b + \beta}{ab}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{\alpha bc + \beta c + \gamma}{abc}$$

$$\vdots$$

Die Nenner schreiten somit nach einem ganz einfachen Gesetz fort. Um den Zähler des nächsten Näherungsbruches zu erhalten, muss man den des vorhergehenden mit dem folgenden Theilnenner multipliciren und zu diesem Produkt den folgenden Theilzähler addiren. Hiernach lassen sich die Zähler der hier aufgestellten Näherungsbrüche leicht folgendermassen in Determinantenform schreiben:

$$\alpha$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ \beta & b & -1 \\ \gamma & 0 & c \end{vmatrix}$$

woraus wir uns sofort zu abstrahiren vermögen folgenden

Lehrsatz. Der Zähler des nten Näherungsbruches des oben aufgestellten Kettenbruches ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ \delta & 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}$$

Beweis. Ist der Satz wahr bis zur Determinante vom $(n-1)$ten Grad, so ist er es auch für die vom nten Grad. Zerlegt man in Unterdeterminanten, so ergiebt sich die obige Determinante, welche wir mit $\triangle$ bezeichnen wollen, gleich folgender algebraischer Summe:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & c & -1 & \dots & 0 \\ \delta & 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi & 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix}_z \pm \omega \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Hier ist das Pluszeichen zu nehmen, wenn n ungerade, hingegen das Minuszeichen, wenn n gerade ist. Die zweite Determinante hat offenbar [58]) den Werth $(-1)^{n-1}$. Ist nun n gerade, so ist n−1 ungerade, somit hat die mit dem negativen Vorzeichen versehene Determinante den Werth + 1; ist n ungerade, so ist n − 1 gerade, und demnach ist jetzt die Determinante wiederum positiv. Wir haben folglich, wenn p_n den Zähler des nten Nähebruches bedeutet,

$$\triangle = zp_{n-1} + \omega$$

Wie wir oben sahen, ist jedoch auch stets

$$p_n = zp_{n-1} + \omega$$

und also durch Comparation

$$\triangle = p_n .$$

Zur Controle unsres Satzes mag folgendes dienen: Ist $a = b = c = \ldots z = 1$, so ist, wie man sofort sieht,

$$p_n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega.$$

Nun besagt aber ein bekannter Satz der Lehre von den Determinanten [58]), dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & -b_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & -b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

stets dem Ausdrucke

$$(-1)^n (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

gleich sei. Wenden wir diess auf unsren Fall an, so ist $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = -1$. $(-1)^n$ ist positiv, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im erstren Falle enthält das Produkt $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ eine ungerade Anzahl von Faktoren, deren jeder $= -1$ ist, ist also selbst negativ, ebenso aber auch das Vorzeichen der Klammer, das Ganze somit positiv. Im anderen Falle ist

$b_1\ b_2 \ldots b_{n-1}$ positiv, hingegen das Vorzeichen der Klammer und $(-1)^n$ negativ, also wiederum das Ganze positiv, wie zuvor. Man hat demnach

$$p_n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega$$

wie zu erwarten stand.

Es ist von Interesse, einen aufsteigenden Kettenbruch in einen absteigenden zu verwandeln. Setzt man zu diesem Ende

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\ldots+\frac{\varrho}{u}+\frac{\chi}{x}+\frac{\psi}{y}+\frac{\omega}{z}\,\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}+\ldots+\frac{x_{n-3}}{y_{n-3}}+\frac{x_{n-2}}{y_{n-2}}+\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+$$

$$=$$

so findet man leicht [60]

$$x_1 = \alpha\ y_1 = a$$
$$x_2 = -\alpha\beta\ y_2 = b\alpha + \beta$$
$$x_3 = -b\alpha\gamma y_3 = c\beta + \gamma$$

Das aus diesen Anfangsgliedern sich ergebende Gesetz scheint bisher nur auf dem Wege der gewöhnlichen Induktion verallgemeinert, jedoch noch nicht mit Hülfe des vollständigen Schlusses von n auf $n+1$ erwiesen zu sein. In der That bieten sich hier auch dem gewöhnlichen Verfahren einige Schwierigkeiten dar, welche jedoch mit Hülfe unsrer Darstellungsweise sich leicht beseitigen lassen.

Lehrsatz. Es ist allgemein

$$\alpha\beta\gamma\ldots\chi\psi\omega = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta & b & -1 & \ldots & 0 \\ \gamma & 0 & c & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi & 0 & 0 & x & -1 \\ \psi & 0 & 0 & \ldots & y \\ \omega & 0 & 0 & \ldots & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b\alpha+\beta & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -b\alpha\gamma & c\beta+\gamma & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -u\varrho\chi & x\varrho+\chi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -x\varrho\psi & y\chi+\psi \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -y\chi\omega & z\omega \end{vmatrix}$$

Beweis. Da wir einen Induktionsbeweis zu geben beabsichtigen, so nehmen wir an, dass die Wahrheit folgender Relationen bereits dargethan sei:

1) $\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi M_1 = N_1$
2) $\alpha\beta\gamma \ldots \varrho\varphi M_2 = N_2$

indem wir unter M_1, M_2; N_1, N_2 resp. diejenigen Unterdeterminanten der beiden obigen Determinanten verstehen, welche bereits durch Winkelhaken abgegrenzt erscheinen. Zerlegen wir hierauf M_1 in Unterdeterminanten, so erhalten wir:

$$M_1 = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \beta & b & -1 & . & . & . & 0 \\ \gamma & 0 & c & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \chi & 0 & 0 & . & . & x & -1 \\ \psi & 0 & 0 & . & . & . & y \end{vmatrix} = yM_2 + \psi$$

In dieser Gleichung substituiren wir für M_1 und M_2 ihre aus den obigen Gleichungen 1) und 2) hervorgehenden Werthe, nämlich

$$M_1 = \frac{N_1}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi}$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi}$$

und erhalten so

$$\frac{N_1}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi} = \frac{yN_2}{\alpha\beta\gamma \ldots \varphi} + \psi$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit ω, so ergiebt sich

$$\omega N_1 - y\chi\omega N_2 = \alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi\omega$$

hiezu addiren wir Gleichung 1), welche wir in folgender Form schreiben:

$$z\psi N_1 = z\alpha\beta\gamma \ldots, \varphi\chi\psi M_1$$

und erhalten demgemäss

$$3)\ (z\psi + \omega)N_1 - y\chi\omega N_2 = z\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi M_1 + \alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi\omega.$$

Betrachten wir nun die oben rechts stehende Determinante, so ergiebt deren Zerlegung in Unterdeteriminanten sofort

$$4)\ (z\psi + \omega)N_1 - y\chi\omega N_2$$

und ebenso die Zerlegung der linksstehenden

$$zM_1 + \omega$$

und multiplicirt mit $\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi$

$$5)\ z\alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi M_1 + \alpha\beta\gamma \ldots \varphi\chi\psi\omega$$

Die in 4) und 5) stehenden Ausdrücke sind aber nach Gleichung 3) einander gleich; hiemit ist der Beweis unsres Satzes geliefert.

Vermittelst eines ähnlichen Verfahrens lässt sich zeigen, dass

$$\alpha\beta\gamma\ldots\chi\psi\,\mathrm{abc}\ldots\mathrm{yz} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a\beta & b\alpha+\beta & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -b\alpha\gamma & c\beta+\gamma & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -u\varrho\chi & x\varrho+\chi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & -x\varphi\psi & y\chi+\psi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -y\chi\omega & z\psi+\omega \end{vmatrix}$$

Bei der Division hebt sich der gemeinschaftliche Faktor $\alpha\beta\gamma\ldots\chi\psi$ auf, und es ergiebt sich allgemein

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\ldots+\frac{\chi}{x}+\frac{\psi}{y} = \frac{\frac{\omega}{z}\,\frac{\alpha}{a}-\frac{a\beta}{b\alpha+\gamma}-\ldots-\frac{u\varrho\chi}{x\varrho+\chi}}{\frac{x\varphi\psi}{y\chi+\psi}-\frac{y\chi\omega}{z\psi+\omega}}$$

Man sieht, dass das Gesetz, nach welchem sowohl die Theilzähler als die Theilnenner eines absteigenden Kettenbruches fortlaufen, welcher einem absteigenden gleich ist, ein sehr einfaches ist. Wäre es möglich, ebenso einen beliebigen absteigenden Kettenbruch in einen aufsteigenden zu verwandeln, dessen Näherungsbrüche sich leicht independent darstellen liessen, so wäre damit viel gewonnen, indem dann das allgemeine Glied der Reihe, in welche sich ein aufsteigender Kettenbruch leicht verwandeln lässt, sofort angebbar und somit die Untersuchung der Convergenz eines Kettenbruches ungemein erleichtert wäre. Diess ist jedoch nicht möglich, wir müssen uns begnügen, die Verwandlung eines absteigenden Kettenbruches in einen aufsteigenden folgendermassen darzustellen [61]):

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\ldots+\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1\,\frac{1}{a_1}}{1-\frac{b_2\,\frac{1}{a_1}}{1-\frac{b_2}{a_2}}}-\ldots$$

58) Baltzer, S. 11.

59) Ibid. S. 17.

60) Lembkes, Theoria fractionum continuarum ascendentium, Monasterii 1870. S. 7.

61) Ibid. S. 25.

12. Es soll nunmehr noch im Folgenden an einem prägnanten Beispiel der Nutzen unsrer Darstellungsweise gezeigt werden, indem wir dieselbe dazu anwenden, die Summe der Glieder zu bestimmen, welche den nten Theilzähler oder Theilnenner eines beliebigen Näherungsbruches des Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots}}$$

ausmachen. Stern hat gezeigt, dass diese Anzahl sich auf doppelte Weise independent angeben lässt, das einemal durch eine Reihe, das andremal durch einen geschlossnen Ausdruck [62]). Während jedoch der erstre Ausdruck auf combinatorischem Wege ermittelt wird, sind zur Gewinnung des andren etwas fremdartige Betrachtungen aus der Theorie der recurrirenden Reihen herübergenommen worden, und es erscheint desshalb eine unmittelbare Auflösung dieses Problems nicht ohne Interesse.

Betrachtet man die den nten Theilnenner ausdrückende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & b_{n-1} & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich sofort, dass die Anzahl der diese Determinante bildenden Ausdrücke gleich ist der Summe derjenigen Ausdrücke, welche resp. die Determinante vom (n—1)ten und (n—2)ten Grade bilden. Bezeichnen wir also die Gliederanzahl des kten Näherungsnenners mit φ_k, so besteht folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} &= \varphi_{n-2} + \varphi_{n-3} \\ \varphi_{n-2} &= \varphi_{n-3} + \varphi_{n-4} \\ &\vdots \\ \varphi_4 &= \varphi_3 + \varphi_2 \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_1 \end{aligned}$$

Dieses System trinomischer Gleichungen ist vollständig analog

dem von Scheibner (s. o. 8.) zuerst betrachteten; nur dass hier resp. $q = r = s = \ldots 1$ ist. Wenden wir die dort angegebne Kettenbruchentwickelung auf den uns vorliegenden Fall an, so ergiebt sich uns

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}$$

und wir finden sonach die gesuchte Grösse φ_n, wenn wir den nten Näherungsnenner dieses Kettenbruches independent bestimmen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke den allgemeinen Kettenbruch

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots + \frac{b}{a}$$

Denken wir uns zunächst diesen Kettenbruch unendlich fortlaufend, so ist bekanntlich sein Werth leicht zu bestimmen; es ist nämlich, wenn wir

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = \frac{a}{2} + x$$

setzen,

$$b = x\,(a + x)$$

$$x = \frac{b}{a + x}$$

und somit

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots \text{ in inf.} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}$$

Suchen wir nunmehr den nten Näherungswerth dieses Kettenbruches, so haben wir, da wir von einem unendlichen Kettenbruche offenbar einen beliebigen endlichen Theil ohne Weiteres abtrennen dürfen,

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots + \frac{b}{a} \overline{|d.\ nte} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}$$

Schreiben wir hierauf den links stehenden Kettenbruch in Determinantenform, so erhalten wir folgende Bestimmungsgleichung

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2} = \frac{b\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b\ a \end{vmatrix}_{\text{d. (n-1)te}} + b\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b\ a \end{vmatrix}_{\text{d. (n-2)te}} \left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2}\right)}{\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b\ a \end{vmatrix}_{\text{d. nte}} + \begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b\ a \end{vmatrix}_{\text{d. (n-1)te}} \left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2}\right)}$$

indem wir nach einem bekannten Satze [63])

$$\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b\ a + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}-\frac{a}{2} \end{vmatrix}$$

in zwei Summanden zerlegt haben. Betrachten wir nunmehr die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b\ a \end{vmatrix}$$

so können wir dieselbe sofort als symmetrale Determinante in der Form

$$\begin{vmatrix} a & -\sqrt{b} & \dots & 0 \\ \sqrt{b} & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{b}\ a \end{vmatrix}$$

darstellen, und diese lässt sich (s. o. 11.) wieder sofort als Reihe schreiben; wir erhalten als ihren Werth

$$a^n + n\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{(n-2)\,(n-1)}{2!}\,a^{n-4}\,b^4 + \dots$$

Diese Reihe geht für $a = b = 1$ in den von Stern angegebnen Ausdruck für φ_n über.

Wir wollen jedoch mit Hülfe dieses Reihenausdruckes unsere oben aufgestellte Relation vervollkommnen. Der Umstand, dass alle

ungeraden Potenzen von a sowohl wie von b fehlen, legt sofort die Nothwendigkeit dar, dass diese Reihe auch als Differenz zweier Ausdrücke in folgender Gestalt

$$\frac{(k_1 + k_2)^{n+2} - (k_1 - k_2)^{n+2}}{k_2}$$

dargestellt werden könne.

Es hebt sich nämlich hier die $(n + 2)$te Potenz weg, die $(n + 1)$te Potenz von k_2 geht durch Division mit k_2 in die (n)te über und wir sehen so, dass, unter k_1 und k_2 zwei vorläufig noch ganz unbestimmte Funktionen von a und b verstanden, dieser Ausdruck für unsre Reihe substituirt werden kann. Demnach ist der nte Näherungsbruch gleich folgendem Ausdruck

$$\frac{(k_1 + k_2)^{n+1} - (k_1 - k_2)^{n+1}}{(k_1 + k_2)^{n+2} - (k_1 - k_2)^{n+2}}$$

oder wenn wir mit $(k_1 + k_2)^{n+2}$ in Zähler und Nenner dividiren,

$$\frac{1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^{n+2}}$$

Setzen wir nunmehr $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \psi_{a,b}$, wo ψ ebenfalls eine noch unbestimmte Funktion von a und b bedeutet, so haben wir die Relationen

$$\varphi_{n-2} = \frac{1}{k_2(k_1+k_2)}(1 - \overset{n}{\psi}_{a,b})\ \varphi_{n-1} = \frac{1}{k_2(k_1+k_2)}(1 - \overset{n+1}{\psi}_{a,b})$$

$$\varphi_n = \frac{1}{k_2(k_1+k_2)}(1 - \overset{n+2}{\psi}_{a,b})$$

und unsre Bestimmungsgleichung geht somit in die folgende über

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2} = \frac{b\,(1 - \overset{n+1}{\psi}_{a,b}) + b\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2}\right)(1 - \overset{n}{\psi}_{a,b})}{(1 - \overset{n+2}{\psi}_{a,b}) + \left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2}\right)(1 - \overset{n+1}{\psi}_{a,b})}$$

Nun ist, wie sich aus der für den Nenner aufgestellten Determinante von selbst ergiebt,

$$(1 - \overset{n+2}{\psi}_{a,b}) = a(1 - \overset{n+1}{\psi}_{a,b}) + b(1 - \overset{n}{\psi}_{a,b})$$

Setzt man für $(1 - \psi_{a,b}^{n+1})$ den Werth ein, so erhält man eine neue Bedingungsgleichung. Diese Gleichung gilt nun für jeden Werth von n, also auch für $n = 1$; führt man diese Substitution durch, so lässt sich im Zähler und Nenner mit

$$1 - \psi_{a,b}$$

heben, und wir bekommen schliesslich

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2} = \frac{b\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)(1+\psi_{a,b}) + b\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2}\right)}{a\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)(1+\psi_{a,b}) + b}$$

Berechnet man hieraus $\psi_{a,b}$, so folgt

$$\psi_{a,b} = \frac{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{2}+b}}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}}$$

und es ist somit

$$\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \; a \end{vmatrix}_{d.\,(n-1)te}}{\begin{vmatrix} a & -1 & \dots & 0 \\ b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \; a \end{vmatrix}_{d.\,nte}} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+1}}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+2} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+2}}$$

Um den Werth des Zählers, resp. Nenners selbst zu finden, müssen wir noch mit

$$k_2 = \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$$

dividiren, und wir erhalten so, indem wir $a = b = 1$ setzen,

$$\varphi_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

Anmerkung. Für $b = 1$ hat den oben stehenden Ausdruck Clausen [61]) durch Auflösung einer Funktionalgleichung, Ramus (s. o. 6.) durch Integration einer endlichen Differenzengleichung gefunden. Die hier durchgeführte Ableitung scheint am natürlichsten aus der independenten Bezeichnung der Näherungswerthe hervorzugehen. Interessant ist es auch, die oben nach Bartholomaei angegebene combinatorische Darstellung mit derjenigen zu vergleichen, welche Kinkelin dem von uns im Vorstehenden betrachteten Ausdruck gegeben hat [65]). Es ist nach ihm

$$(a)\ \varphi_{m-1} = \frac{a^{2m-1} + (2m-2)_1\, a^{2m-3} + (2m-3)_2\, a^{2m-5} + \ldots}{(a)\ \varphi_m \quad a^{2m} + (2m-1)_1\, a^{2m-2} + (2m-2)_2\, a^{2m-4} + \ldots}$$

62) Stern, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Berlin 1834. S. 8. S. 10.

63) Baltzer, S. 14.

64) Clausen, die Funktion $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \ldots$ durch die Anzahl der a ausgedrückt, Crelle's Journal. 3. Band. S. 87.

65) Kinkelin, Ueber die Ausziehung von Wurzeln aus Zahlen, Grunert's Archiv. 26. Theil. S. 386.

Zusätze zu Kapitel 1.

Zu §. 2. Es könnte scheinen, als ob die in diesem Paragraph aufgestellte Behauptung, Euler's Algorithmus habe sich keinen allgemeineren Eingang verschafft, irrig sei, indem die Euler'schen Symbole häufig angetroffen werden. Allein es zeigt sich, dass entweder dieselben nur zur Ableitung einiger Sätze gebraucht werden, deren Beweis Euler selbst bereits gegeben hat, oder dass diese Symbole lediglich zur abkürzenden Bezeichnung benutzt werden. Das erstre findet man bei dioptrischen Untersuchungen, so in der physiologischen Optik von Fick [66]). Auch bei Gauss treffen wir auf die Euler'sche Klammer - Bezeichnung [67]). Es heissi daselbst: „Si quantitates A, B, C, D, E etc. ita ab his α, β, γ, δ pendent, ut habeatur

$$A = \alpha,\ B = \beta A + 1,\ C = \gamma B + A,\ D = \delta C + B,\ E = \varepsilon D + C \text{ etc.}$$

brevitatis gratia ita eas designamus,

$$A = [\alpha]\quad B = [\alpha, \beta],\ C = [\alpha, \beta, \gamma],\ D = [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \text{ etc.}“$$

Es ist nun gegeben die unbestimmte Gleichung 1. Grades

$$ax = by \pm 1,$$

man bildet aus ihr durch gewöhnliche Division die Gleichungen

$$a = \alpha b + c,\ b = \beta c + d,\ c = \gamma d + e \ldots m = \mu n + 1$$

„Erit itaque

$$a = [n, \mu, \ldots \gamma, \beta, \alpha],\ b = [n, \mu \ldots \gamma, \beta]$$

Tum fiat

$$x = [\mu \ldots \gamma, \beta,], \; y = [\mu \ldots \gamma, \beta, \alpha]$$

eritque $ax = by + 1$, quando numerorum $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$, multitudo est par, aut $ax = by - 1$, quando est impar." Die Worte „brevitatis gratia" charakterisiren auf's Deutlichste die Ansichten von Gauss über diese Darstellungsweise.

Ohne, wie es scheint, von Euler's Arbeit Kenntniss zu haben, lieferte Clausen zu zwei im Vorstehenden enthaltenen Sätzen über die Kettenbrüche die Beweise [68]). Es sind die folgenden: hat man die Kettenbrüche

$$\frac{1}{a_1 + \ldots + \frac{1}{a_n}} \text{ und } \frac{1}{a_n + \ldots + \frac{1}{a_1}}$$

so ist

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$$

und

$$[a_1 \ldots a_n] = [a_n \ldots a_1]$$

Der Beweis dieses letztren Satzes findet sich bei Euler (s. o. 2) kürzer erledigt.

Zu §. 4. Hindenburg kommt noch bei einer andren Gelegenheit [69]) auf seine involutorische Darstellung der Kettenbrüche zurück. Tetens [70]) hatte nämlich bei Gelegenheit der independenten Darstellung der Polynomialcoëfficienten der Combinatorik den Vorwurf gemacht, sie sei, wenn man gewisse analytische Substitutionen anwende, vollständig entbehrlich — ein Vorwurf, der freilich als ziemlich grundlos erscheinen muss, wenn man bemerkt, dass auch Tetens mit Symbolen operirt, deren Mechanismus weniger ausgebildet ist, als die von Hindenburg in ein festes System gebrachten combinatorischen Regeln. Hindenburg zeigt nun, dass seine Methode „bei Transformationen, Substitutionen und Interpolationen" von grösstem Vortheil sei, er beruft sich auf Cramer und Bezout, bei welchen allerdings die combinatorischen Symbole bereits in die ungleich vollkommeneren Determinanten übergehen, und fährt dann fort: „Ich berufe mich hier auf Dan. Bernoulli's Behandlung der Werthe für continuirliche Brüche, wo man deutlich übersieht, dass, nach Anbringung des von ihm sogenannten compendii praestantissimi, die Analysis aus ihren bis dahin

bekannten Mitteln, zu weiterer Abkürzung, zu allgemeinerer Darstellung, zu deutlicher Vorlegung des Bildungs- und Fortgangsgesetzes, nichts weiter hinzuzusetzen vermag, und dass man diese Vortheile zusammen und auf einmal erhält, sobald man die hier vorkommenden Combinationscomplexionen involutorisch ordnet und zusammensetzt. Die Sache verdient noch etwas genauer erwogen zu werden.

Folgendes Schema

$$A = \left\{\begin{array}{llllll} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 9 & \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 10 & \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 10 & \\ 0 & 2 & 5 & 9 & & \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 10 & \\ 0 & 3 & 6 & 9 & & \\ 0 & 3 & 7 & 10 & & \end{array}\right\} = B$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} 1 & 4 & 6 & 8 & 10 & \\ 1 & 4 & 6 & 9 & & \\ 1 & 4 & 7 & 10 & & \\ 1 & 5 & 8 & 10 & & \\ 1 & 5 & 9 & & & \end{array}\right\} = C$$

das man sehr leicht aus dem Anfange

$$\begin{array}{|llll} 8 & 10 & & \\ 9 & & & \end{array}$$

combinatorisch entwickelt, stellt von den continuirlichen Brüchen

$$z = 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \text{ etc. bis } 10$$

oder

$$z = \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} \text{ etc. bis } 10$$

den 5 Werth (v 5) vor.“ Es wird dann weiter gesagt, dass dieses involutorische Gesetz bereits in Euler's Algorithmus verborgen liege und mit einem Rückblick anf die Geschichte der combinatorischen Analysis heisst es schliesslich: „Auf solche Formen nun sind Leibnitz, Jac. Bernoulli, de Moivre, Cramer, Boscowich, Bézout, Castillon und andere, von Zeit zu Zeit verfallen, und haben die Wirksamkeit ihrer Formeln mit Bewunderung gerühmt und anempfohlen.“

Zu §. 5. Eine der Lieblein'schen ähnliche Regel findet sich auch angegeben von Weiss [71]). Es wird zum Zwecke optischer Untersuchungen der Zusammenhang der Kettenbrüche mit einem System trinomischer linearer Gleichnngen nachgewiesen und dann

die independente Bildung der Näherungswerthe eines so entstandenen Kettenbruches gelehrt.

66) A. Fick, Die medizinische Physik, Braunschweig 1858. S. 245.

67) Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae 1801. S. 17.

68) Clausen, Demonstratio duarum celeberrimi Gaussii propositionum, Crelle's Journal, 3. Band. S. 311.

69) Sammlung combinatoriseh-analytischer Abhandluugen, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg, Leipzig 1796. 1. Sammlung. S. 275.

70) Ibid. S. 4.

71) Weiss, Elemente der analytischen Dioptrik, Nürnberg 1856. §. 1.

Verbesserungen.

S. 8. Z. 8 v. u. ist nach Singularis einzuschalten: in solvendo problemate Pelliano.

S. 21. Z. 9 v. o. ist nach fractionum einzuschalten: valoribus.

S. 32 Z. 9 v. u. statt a l, a_n .

S. 51 u. 52 ist bei sämmtlichen Exponenten statt $(n + 2)$ und $(n + 1)$ resp. $(n + 1)$ und n zu lesen.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.